

65, 13, 490

**Zur Plasmadynamik in wandstabilisierten  
Lichtbögen**

**Diplom Physiker Hans-Josef Patt**  
**aus Troisdorf**

**H**  
**65**  
**2888**

# **Zur Plasmadynamik in wandstabilisierten Lichtbögen**

**Von der  
Fakultät für Allgemeine Wissenschaften  
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen  
zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften  
genehmigte Dissertation**

vorgelegt von  
Diplom Physiker Hans-Josef Patt  
aus Troisdorf

Referent: Professor Dr. rer. nat. G. Schmitz

Korreferent: Professor Dr. Ing. W. Fucks

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Juli 1964

H 65 - 2888

Universitätsbibliothek  
Saarbrücken

Herrn Professor Dr. -rer. nat. G. Schmitz gebührt  
mein besonderer Dank für seine wissenschaftliche Betreuung, für  
zahlreiche wertvolle Diskussionen und für die Ermöglichung dieser  
Arbeit.

Herrn Professor Dr. -Ing. W. Fucks danke ich für seine  
wohlwollende Förderung und Unterstützung bei der Durchführung der  
Arbeit.

Außerdem bin ich Herrn Dr. Haupt vom Rechenzentrum  
der Technischen Hochschule Aachen für die Bereitstellung von Ma-  
schinenzeit und viele wichtige Hinweise zu Dank verpflichtet.

## GLIEDERUNG

1.	EINLEITUNG	1
2.	DER PLASMAZUSTAND DER MATERIE UND SEINE GRUNDLEGENDEN EIGENSCHAFTEN IN LICHTBÖGEN	2
2. 1.	Der allgemeine Begriff des Plasmas	2
2. 2.	Das thermische Gleichgewicht der verschiedenen Teilchensorten im Lichtbogenplasma	4
2. 3.	Die Quasineutralität des Bogenplasmas	7
3.	DIE ABLEITUNG DER PLASMAGLEICHUNGEN NACH DEM FLÜSSIGKEITSMODELL UND IHRE SPEZIALI- SIERUNG AUF STATIONÄRE ACHSENROTATIONS- SYMMETRISCHE BOGENFLASMENKONFIGURATIONEN	10
3. 1.	Die Zustandsgleichung	11
3. 2.	Die Kontinuitätsgleichung der Masse	13
3. 3.	Die erweiterte Navier-Stokessche Gleichung	14
3. 4.	Die Energiebilanz	17
3. 5.	Die Maxwellischen Gleichungen	19
3. 6.	Die phänomenologischen Beziehungen	21
3. 7.	Die Randbedingungen	23
4.	THEORETISCHE ERGEBNISSE UND EXPERIMEN- TELLE MÖGLICHKEITEN ZUR BESTIMMUNG DER BENÖTIGTEN MATERIALFUNKTIONEN MIT ANWEN- DUNG AUF STICKSTOFF- UND ARGONPLASMEN	24
4. 1.	Die Dichte und Enthalpie	26
4. 2.	Die elektrische Leitfähigkeit, die spezifische Abstrah- lung von optisch dünnen Lichtbogenplasmen und die Wärmeleitfähigkeit	28
4. 3.	Die Zähigkeit	37
5.	DER WANDSTABILISIERTE ZYLINDERSYMMETRI- SCHE LICHTBOGEN OHNE KONVEKTION	41
5. 1.	Die Grundgleichungen und ihre verschiedenen Lösungs- methoden	41

5. 2.	Das allgemeine Verhalten eines solchen Bogentyps für atomare (z. B. Argon) und molekulare (z. B. Stickstoff) Füllgase	44
5. 2. 1	Die Berechnung der thermischen Eigenschaften	45
5. 2. 2.	Das elektrische Verhalten und die Größe der Abstrahlung	55
5. 2. 3.	Das Eigenmagnetfeld und die Pinchwirkung	64
6.	DER WANDSTABILISIERTE ZYLINDERSYMMETRISCHE LICHTBOGEN MIT HAGEN-POISEUILLE STRÖMUNG	69
6. 1.	Die Grundgleichungen und ihre Lösung	70
6. 2.	Die Geschwindigkeitsverteilung und abgeleitete Größen	73
7.	DIE EIN- UND AUSLAUFSTRÖMUNG IN EINEM WANDSTABILISIERTEN ROTATIONSSYMMETRISCHEN BOGEN	86
7. 1.	Die Grundgleichungen und ihre Randbedingungen	88
7. 2.	Verschiedene Lösungsmethoden für die thermischen und elektrischen Größen	90
7. 2. 1.	Eine Näherungslösung für große Durchflußmengen mit Hilfe des Besselmodells	90
7. 2. 2.	Die Linearisierung der Grundgleichungen	99
7. 2. 2. 1.	Analytische Lösung bei konstanten Koeffizienten	105
7. 2. 2. 2.	Numerische Lösung bei variablen Koeffizienten	110
7. 3.	Die Bestimmung des dynamischen Verhaltens	114
8.	DIE NUMERISCHEN ERGEBNISSE FÜR EINEN STICKSTOFFBOGEN	118
8. 1.	Die Länge der Einlaufstrecke	118
8. 2.	Die thermischen und elektrischen Störgrößen	123
8. 3.	Die integralen charakteristischen Größen	135
9.	ZUSAMMENFASSUNG	137
10.	ZEICHENERKLÄRUNG	139
11.	LITERATURVERZEICHNIS	142

## 1. EINLEITUNG

Seit der Entdeckung des elektrischen Lichtbogens um das Jahr 1808 [19] ist dieses Phänomen zu einem sehr wichtigen Untersuchungsobjekt und Hilfsmittel für viele Gebiete der Physik geworden. Während sich in der ersten Zeit das Interesse besonders auf die technischen Anwendungsmöglichkeiten des Bogens als sehr intensive Lichtquelle und als Gerät zum Schmelzen von Stoffen mit hohem Schmelzpunkt konzentrierte, ging der Trend später darauf hinaus, den Lichtbogen zur Prüfung und Erprobung der verschiedensten Meßmethoden und Theorien der Plasmaphysik zu benutzen. Dies ist durch die Tatsache zu erklären, daß bisher der Lichtbogen die einzige Anordnung darstellt, die es erlaubt, Plasmen von hoher Temperatur und relativ einfacher Geometrie stationär für längere Zeiten herzustellen. In diesem Sinne ist auch die starke Ausweitung der verschiedenen Betriebsparameter zu verstehen. Dabei wurden schon kurzzeitig Bogentemperaturen von  $100\,000^{\circ}\text{K}$  erreicht.

Neben der Plasmaphysik besitzt der Lichtbogen aber auch für die Astrophysik eine große Bedeutung, da sich stellenweise Vorgänge im Weltall in einem Lichtbogen simulieren lassen. Weiter kann der Lichtbogen dazu benutzt werden, die charakteristischen Größen und Materialfunktionen der verschiedensten Gase bei hohen Temperaturen und verschiedenen Drücken zu bestimmen.

Nachdem die Vorgänge vor allem in der Säule des Bogens einer quantitativen Behandlung zugänglich geworden sind, und eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Experiment erzielt werden kann, wollen wir uns in dieser Arbeit mit der Wechselwirkung der thermischen, elektrischen und dynamischen Größen in Lichtbögen mit einfacher Geometrie beschäftigen. Der Lichtbogen, der im allgemeinen zu extrem instabilem Verhalten neigt, soll dabei durch den Einfluß von gekühlten Wänden stabilisiert werden. Alle Fragen, die in diesem Zusammenhang auftreten, sind von großer Wichtigkeit für die Physik der Plasmaantriebe und der sog. Bogenheißgaserzeuger (arc heaters), die zum Testen von Flugkörpern bei hohen Enthalpiedichten, wie sie beim Eintauchen von Satelliten in die Atmosphäre von Planeten (re-entry) auftreten, benutzt werden. Dazu werden heute schon Lichtbögen bis zu 150 MW elektrisch zugeführter Leistung und 6 m Länge gebaut. Dabei finden die verschiedensten Bogentypen und Geometrien Verwendung. Ohne auf die Vielfalt der verschiedenen Anordnungen einzugehen, sollen in dieser Arbeit die prinzipiellen Vorgänge untersucht und berechnet werden.



## 2. DER PLASMAZUSTAND DER MATERIE UND SEINE GRUNDLEGENDE EIGENSCHAFTEN IN LICHTBOGEN

### 2.1. Der allgemeine Begriff des Plasmas

Wenn man die Verteilung der im Weltall vorkommenden Materie auf die verschiedenen Aggregatzustände untersucht, so kommt man zu der zuerst überraschenden Feststellung, daß sich mehr als 99,9 % von ihr in einem Zustand befindet, der von J. Langmuir [8] in den zwanziger Jahren mit Plasmazustand bezeichnet wurde. Trotz dieses großen Vorkommens beschäftigt sich die Physik erst seit ungefähr 50 Jahren, davon die letzten 15 Jahre in besonders starkem Maße, mit seinen zahlreichen Gesetzmäßigkeiten und teilweise völlig neuen Phänomenen, da erst in dieser Zeit die Voraussetzungen und Möglichkeiten für eine Darstellung und Untersuchung dieses Zustandes in Labor- und astrophysikalischen Dimensionen für einen großen Parameterbereich geschaffen wurden.

Beim heutigen Stand der Forschung existieren recht zahlreiche Definitionen des Begriffs Plasma, die aber zum Teil doch zu speziell sind. Um im Rahmen dieser Arbeit nicht zu weit ausholen zu müssen, wollen wir einfach unter einem Plasma einen solchen Zustand der Materie verstehen, bei dem das gesamte dynamische Verhalten dieses Stoffes in erster Linie durch die elektrischen und magnetischen Kräfte, die an und zwischen den darin vorkommenden Ladungsträgern angreifen, charakterisiert wird.

Um uns einen ersten Überblick über die Eigenschaften und Vorgänge vor allem im Hinblick auf die später betrachteten Bogenplasmen zu verschaffen, betrachten wir ein Gasvolumen, dem von außen fortwährend Energie in irgendeiner Form zugeführt wird. Diese Energiezufuhr bewirkt, daß in der anfangs homogenen Gasphase durch die verschiedenen Elementarprozesse, wie zum Beispiel der elastische Stoß, die Plasmawechselwirkung, Anregung, Löschung, Dissoziation, Ionisation, Rekombination, Umladung, Emission und Absorption von Lichtquanten, aus den anfangs neutralen Gasatomen oder Molekülen in merklicher Menge Elektronen, Atom- und Molekülionen mit ver-

schiedenen Wertigkeiten und Photonen entstehen. Wir erhalten also auf diese Weise ein Gasgemisch mit sehr heterogenem Charakter und spezifisch neuen Eigenschaften. Durch das Vorhandensein von Ladungsträgern besitzt dieser Zustand eine meßbare elektrische Leitfähigkeit. Elektrische und magnetische Felder werden das Verhalten dieses Gemisches in charakteristischer Weise beeinflussen. Schließlich ist durch das Vorhandensein von angeregten Atomen, Ionen, Molekülen und beschleunigten Elektronen eine relativ große elektromagnetische Strahlungsdichte zu erwarten.

Wie wir sehen, erhalten wir also im Sinne unserer obigen Definition immer, wenn wir einem Gas auf irgendeine Weise genügend hohe Energie zuführen, ein Plasma. Von der Art der zugeführten Energie und den Betriebsparametern hängt es nun ab, welche weiteren Größen das zu untersuchende Plasma charakterisieren. Dabei kann man grundsätzlich von zwei Modellvorstellungen ausgehen, nämlich dem Teilchen- und dem Flüssigkeitsmodell. Im ersten Fall versucht man, aus dem Verhalten von einzelnen Testteilchen durch Summation eine Aussage über das Plasma als Ganzes zu erhalten, während man zum anderen in Analogie zur klassischen Hydrodynamik das Plasma als eine noch zu modifizierende Flüssigkeit aus  $n$  Komponenten betrachtet. Natürlich sind für die beiden Modelle Grenzen gesetzt. Im allgemeinen Falle wird man zur theoretischen Erfassung das sehr komplexe statistische Problem lösen müssen, wobei man praktisch nie ohne zum Teil gewagte Näherungen auskommen kann.

Beim Lichtbogenplasma wird das ganze Problem auf Grund zweier durch Experimente und theoretische Überlegungen gesicherter Eigenschaften wesentlich vereinfacht, einmal durch das in erster Näherung erfüllte lokale thermische Gleichgewicht und zum anderen durch die Quasineutralität in der Lichtbogensäule.

Aus diesem Grunde nennt man das Lichtbogenplasma auch thermisches quasineutrales Plasma. Diese wichtigen Eigenschaften sollen in den nächsten beiden Abschnitten besprochen werden.

## 2.2. Das thermische Gleichgewicht der verschiedenen Teilchensorten im Lichtbogen

Wie wir im ersten Abschnitt gesehen haben, können wir ein Gas in den Plasmazustand überführen, indem wir ihm genügend viel Energie zuführen. In der Säule des Lichtbogens, die unser späteres Untersuchungsobjekt darstellen wird, wird dieser Prozeß vor allem durch die ohmsche Aufheizung des Gases infolge des von außen angelegten elektrischen Feldes (Größenordnung 20 V/cm) in Verbindung mit großen elektrischen Strömen (größer als 1 A), die für einen Lichtbogen charakteristisch sind, bewirkt. Die Ladungsträger erhalten in diesem Feld eine Driftgeschwindigkeit in Richtung oder entgegengesetzt zum Feld, die ihrer thermischen Bewegung überlagert ist. Für die Geschwindigkeit der verschiedenen Teilchensorten unter sich ergibt sich auf Grund der weitreichenden Wechselwirkung der Coulombkräfte und durch Stöße mit Teilchen der gleichen Art schon nach kurzer Zeit, die etwa von der Größenordnung der mittleren freien Flugzeit  $\tau$  sein wird (s. (4.3) und [19, 89]; bei einer Temperatur von  $T = 10^4$  °K und einem Druck von  $p = 1$  atm ergibt sich für Stickstoff:

$$\tau_{N_2} \approx \tau_N \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ sec}; \tau_{N^+} \approx 10^{-11} \text{ sec}; \tau_e \approx 5 \cdot 10^{-12} \text{ sec},$$

in erster Näherung eine Maxwellverteilung, die bei konstanter Temperatur natürlich um so besser verifiziert ist, je höher der Druck und damit die Anzahl der Teilchen pro Volumeneinheit und die Zahl der Stöße pro Zeiteinheit und je kleiner die überlagerte Driftgeschwindigkeit ist. Die Störung der Maxwellverteilung der Ladungsträger durch die Driftgeschwindigkeit wird um so kleiner sein, je kleiner das Verhältnis von Drift- zur thermischen Geschwindigkeit ist (für Stickstoff beträgt ein charakteristischer Wert dieses Verhältnisses

$$\bar{v}_{Dr}/\bar{v}_{th} = 5 \cdot 10^{-3} \quad \text{für } T = 10^4 \text{ °K, } p = 1 \text{ atm, } j = 10^3 \text{ A cm}^{-2}; \text{ s. (4.1)}$$

Es sei hier noch erwähnt, daß wegen der geringen Feldstärke keine "run-away" Elektronen das Plasma verlassen können.

Den Einfluß des Eigenmagnetfeldes auf diese Vorgänge erkennt man am besten aus dem Verhältnis der mittleren freien Weglänge der geladenen Teilchen zu ihrem Gyrationradius

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{r_e B}{m} \quad (2.2.1)$$

Für ein Stickstoffplasma ergibt dieses Verhältnis für die Elektronen einen Wert von  $\approx 10^{-2}$  ( $H = 100$  A/cm,  $T = 10^4$  °K,  $p = 1$  atm; siehe (5.2.3)). Wegen der Kleinheit dieser Größe braucht also dieser Einfluß nicht berücksichtigt zu werden.

Außer durch die oben geschilderten Prozesse wird das thermische Gleichgewicht natürlich auch durch verschiedene Flüsse, die z. B. für die Wärmeleitung, Diffusion oder Abstrahlung verantwortlich sind, gestört. Wir werden sagen können, daß die Einflüsse klein sein werden, wenn die Ströme klein sind gegen die Änderung der entsprechenden integralen Größen über eine freie Weglänge. Dies ist aber im Lichtbogen, wie wir in den Kapiteln (5) und (8) sehen werden, überall bis auf sehr nahe Wandgebiete und in den Bereichen sehr nahe bei den Elektroden, mit denen wir uns in dieser Arbeit nicht beschäftigen wollen, sehr gut erfüllt. Die Strahlung ist bis auf einzelne Linien nicht im thermodynamischen Gleichgewicht. Dies ist darauf zurückzuführen, daß weitgehend der Umkehrprozeß zur Emission, nämlich die Absorption, fehlt, da wir optisch dünne Bögen betrachten. Trotzdem stört dieser Prozeß nicht wesentlich das thermodynamische Gleichgewicht der angeregten Teilchen, da nur ungefähr jedes  $10^4$  bis  $10^5$  angeregte Teilchen seine Überschussenergie abstrahlt, wie folgende grobe Abschätzung zeigen soll.

Fro  $\text{cm}^3$  strahlen  $n^*$  von den angeregten Atomen in einer mittleren Zeit von  $\tau = 10^{-8}$  sec jeweils eine Energie von  $h\nu$  ab, wobei  $\nu$  eine mittlere Frequenz des abgestrahlten Lichtes bedeutet. Daraus erhalten wir die folgende Gleichung, wenn wir beachten, daß die gesamte abgestrahlte Energie pro Volumen- und Zeiteinheit  $\bar{u}$  für optisch dünne Bögen experimentell bekannt ist (siehe 4.1).

$$n^* = \frac{\bar{u} \tau}{h \nu} \quad (2.2.2)$$

Die Gesamtzahl der angeregten Teilchen  $n_A$  erhält man näherungsweise aus dem Boltzmannschen Satz für gequantelte Systeme, wenn wir voraussetzen, daß die Teilchen nur einen Grundzustand und einen angeregten Zustand mit der Energiedifferenz  $h\bar{\nu}$  besitzen, zu

$$n_A = \frac{n_0}{1 + g_0/g_A e^{\frac{h\bar{\nu}}{kT}}} = \frac{P_0}{kT} \frac{1}{1 + g_0/g_A e^{\frac{h\bar{\nu}}{kT}}} \quad (2.2.3)$$

Aus (2.2.2) und (2.2.3) erhalten wir für das Verhältnis der Atome, die ihre Energie abstrahlen, zu der Gesamtzahl der angeregten Atome

$$\frac{n^*}{n_A} = \frac{\bar{u} \tau kT}{P_0 h \bar{\nu}} \left( 1 + g_0/g_A e^{\frac{h\bar{\nu}}{kT}} \right) \quad (2.2.4)$$

Für Daten aus einem Stickstoffbogen ( $T = 10^4$  °K,  $p_0 = 1$  atm,  $\bar{\lambda} = \frac{c}{\nu} = 5 \cdot 10^{-5}$  cm) erhält man daraus den oben genannten Wert.

Wie wir sehen, müssen also die meisten angeregten Teilchen ihre Energie auf andere Weise abgeben, z. B. in Form von kinetischer Energie beim Stoß zweiter Art. Sie tragen auf diese Weise zur Einstellung des thermischen Gleichgewichtes bei.

Aus unseren bisherigen Überlegungen können wir den Schluß ziehen, daß wir unter den angegebenen Bedingungen berechtigt sind, den einzelnen Teilchensorten im Lichtbogen eine Temperatur zuzuschreiben.

Es bleibt jetzt noch zu untersuchen, wie stark sich die Temperaturen der verschiedenen Teilchensorten unterscheiden. Dazu ist vor allem festzustellen, wie die von den Ladungsträgern aus dem Feld aufgenommene Energie auf die Neutralteilchen übertragen wird. Der einfachste Fall ist hierbei der elastische Stoß. Dabei ist der Austausch des mittleren Energieüberschusses wegen der gleichen Massen zwischen Ionen und Atomen am besten, dagegen zwischen Elektronen und Atomen rund 500 A ( $A = \text{Gesamtnukleonenzahl der Atome}$ ) mal kleiner (z. B. für Stickstoff  $7 \cdot 10^3$  mal). Das Elektron benötigt also rund  $1/2 m_i/m_e \approx 10^3$  A Stöße, um seinen Energieüberschuß abzugeben, während die Ionen schon nach ungefähr 10 Stößen ihren Energieüberschuß bis auf 1 % übertragen haben. Wie aus dem Vorhergehenden folgt,

liegen die Einstellzeiten für ein Stickstoffplasma mit den angegebenen Daten für Elektronen bei ungefähr  $\tau_{ew} \approx 10^{-6} - 10^{-7}$  sec, für Ionen dagegen bei  $\tau_{iw} \approx 10^{-10}$  sec. Die Elektronen sind also in erster Linie für die Aufnahme von Energie aus dem Feld verantwortlich. Diese rein qualitativen Ergebnisse erfahren durch neuere experimentelle Arbeiten ihre Bestätigung [33, 42, 43]. Diese Effekte bewirken, daß die Elektronentemperatur  $T_e$  oberhalb der Ionentemperatur  $T_i$  liegt, die nur etwas höher als die Gastemperatur anzusetzen ist. Es gilt also die Beziehung

$$T_g \leq T_i < T_e. \quad (2.2.5)$$

Die Differenz wird um so kleiner sein, je höher der Druck und je kleiner die Feldstärke ist. Wie Messungen zeigen [5, 26, 28, 44, 90, 92] fällt bei Drücken über einer halben Atmosphäre der Unterschied in die Größenordnung der Meßgenauigkeit.

Neben den elastischen Stößen tragen auch die unelastischen Stöße in nicht geringem Maße zur Einstellung des thermischen Gleichgewichts bei.

Wenn wir die obigen Überlegungen zusammenfassen, kommen wir zu dem Schluß, daß man in der Säule eines Lichtbogens unter den oben genannten Bedingungen lokales thermisches Gleichgewicht des Plasmas annehmen kann. Wir können also das Plasma eindeutig nach den Gesetzen der Thermodynamik durch eine lokal eindeutige Temperatur  $T$  und einen Druck  $p$  beschreiben.

### 2.3. Die Quasineutralität des Bogenplasmas

Nachdem wir im letzten Kapitel eine Eigenschaft des Lichtbogenplasmas kennengelernt haben, die die Beschreibung des thermischen Verhaltens wesentlich erleichtert, wollen wir uns nun einer anderen grundlegenden elektrischen Eigenschaft zuwenden, nämlich der Tendenz des Plasmas zur Quasineutralität.

Wie wir weiter oben gesehen haben, wird ein Plasma dadurch charakterisiert, daß Ladungsträger-Ionen und Elektronen - in meßbarer Menge vorhanden sind. Trotzdem erscheint ein kräfte-freies Plasma nach außen hin elektrisch neutral. Auch treten keine Raumladungen im Innern auf. Diese Tatsache ist dadurch zu erklären, daß erstens das Plasma aus neutralen Atomen entstanden ist, und daß zweitens der Gleichgewichtszustand durch ein Minimum der elektrischen Energie ausgezeichnet ist.

Die Verhältnisse in Lichtbögen gleichen diesem Gleichgewichtszustand, wie folgende Überlegung zeigen soll [19]. Wir gehen dazu von der Poisson-Gleichung aus (siehe 3. 5)

$$\operatorname{div} E = g_{el} / \epsilon_0 \quad (2. 3. 1)$$

Hier bedeuten  $E$  die elektrische Feldstärke,  $g_{el}$  die Ladungsdichte und  $\epsilon_0$  die absolute Dielektrizitätskonstante. Wir betrachten nun zwei Halbräume, die sich zuerst überdecken. Der eine sei mit  $n_i$  einwertigen Ionen und der andere mit  $n_e$  Elektronen pro Volumeneinheit gefüllt. Wenn wir annehmen, daß die Teilchenzahlen  $n_i$  und  $n_e$  gleich sind, verhält sich die Anordnung quasineutral. Wir verschieben nun wegen ihrer kleineren Masse alle Elektronen um die Strecke  $x$ . Die auftretende Feldstärke ergibt sich dann aus Gleichung (2. 3. 1) zu

$$|E| = en_e / \epsilon_0 \cdot x \quad (2. 3. 2)$$

Mit den Daten eines Stickstoffbogens ( $|E| = 20 \text{ V/cm}$ ,  $T = 10^4 \text{ °K}$ ,  $p = 1 \text{ atm}$ ), erhält man für  $x$  den numerischen Wert von nur  $5 \cdot 10^{-10} \text{ cm}$ .

Dieses Beispiel zeigt also, daß merkliche Verschiebungen nur durch große Feldstärken bewirkt werden können, die aber im Lichtbogenplasma nicht zur Verfügung stehen.

Bei dem obigen Beispiel haben wir ein starres Ionengitter vorausgesetzt. In Wirklichkeit müssen wir natürlich die thermische Bewegung der Teilchen, die in Wechselwirkung mit den Coulombkräften

steht, in unsere Überlegungen einbeziehen. Auch müssen wir die Abschirmung der Ionen durch die Elektronen und umgekehrt berücksichtigen. In diesem Zusammenhang ist eine charakteristische Länge von Bedeutung, die sogenannte Debyesche Abschirmdistanz  $D$ , die einmal ein Maß für die Reichweite der Coulombkräfte darstellt, und zum anderen die Strecke angibt, bei der die Energie durch die Coulombkräfte  $e^2 n_e / \epsilon_0 \cdot D^3 / 2$  gleich der mittleren thermischen Energie eines Testteilchens pro Freiheitsgrad  $1/2 kT$  ist. Sie ergibt sich daraus zu

$$D = \sqrt{k\epsilon_0 / e^2} \cdot \sqrt{T / n_e} \quad (2. 3. 3)$$

oder zu

$$D / \text{cm} = 6,3 \cdot \sqrt{T / ^\circ\text{K} / n_e / \text{cm}^3} \quad (2. 3. 4)$$

Für die Daten des Stickstoffbogens ( $T = 10^4 \text{ °K}$ ,  $p = 1 \text{ atm}$ ) ergibt sich eine Debyelänge von  $5 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$ . Wir werden also sagen können, daß lokale Quasineutralität im Lichtbogen bis zu diesen Dimensionen zu erwarten ist, wenn der Durchmesser des Bogens groß gegen  $D$  ist. Dabei müssen wir beachten, daß  $D$  in Wandnähe größere Werte annehmen kann.

Eine weitere Störung der Quasineutralität kann das Eigenmagnetfeld des Bogens verursachen. Wie eine Abschätzung [19] und spätere Betrachtungen zeigen (siehe (6. 2)), wird dieser Effekt im merkbaren Maße nur wirksam, wenn die Drift- und Gasgeschwindigkeiten in die Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit kommen. Für die später betrachteten Bögen, wo die Driftgeschwindigkeit schon klein gegen die thermische Bewegung ist (siehe (2. 2)), ist also keine Störung zu befürchten.

Wenn wir die wichtigsten Ergebnisse aus dem letzten Kapitel zusammenfassen, so können wir sagen, daß im Lichtbogen unter den angegebenen Bedingungen ein thermisches, quasineutrales Plasma vorliegt. Unter diesen Bedingungen vereinfachen sich die beschreibenden Gleichungen für die verschiedenen Lichtbogenzustände, die wir im nächsten Kapitel ableiten werden, ganz erheblich.

### 3. DIE ABLEITUNG DER PLASMAGLEICHUNGEN NACH DEM FLÜSSIGKEITSMODELL UND IHRE SPEZIALISIERUNG AUF STATIONÄRE AXSENROTATIONSSYMMETRISCHE BOGENPLASMAKONFIGURATIONEN

Im Abschnitt(2. 1) wurde festgestellt, daß im wesentlichen zwei Modelle zur Beschreibung des allgemeinen Plasmazustandes entwickelt wurden, nämlich das Teilchen- und das Flüssigkeitsmodell. Wie schon der Name sagt, wird die Beschreibung durch das Teilchenmodell dann von Vorteil sein, wenn die Dichte so klein ist, daß die charakteristischen Längen des Plasmas in die Größenordnung des betrachteten Plasmavolumens fallen. Da im hier vorliegenden Falle der andere Extremfall das Plasmaverhalten bestimmt, werden wir die beschreibenden Gleichungen mit Hilfe des Flüssigkeitsmodells finden müssen.

Wenn in einem Plasma örtliche und zeitliche Änderungen der thermischen und elektrischen Größen vorliegen, so besteht im strengen Sinne kein detailliertes thermodynamisches Gleichgewicht mehr, bei dem jeder Prozeß mit seinen Umkehrprozessen im Gleichgewicht sein muß. In diesem Falle geht eine exakte Formulierung der das Plasma beschreibenden Beziehungen vom Liouvilleschen Satz aus [11, 76]. Unter gewissen Bedingungen erhält man hieraus für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_i(t, x, v)$  im Phasenraum der verschiedenen Teilchensorten je eine Boltzmann-Gleichung

$$\frac{D f_i}{D t} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{\text{Stöße}} + \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{\text{evz}} \quad (3.1)$$

oder

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v \operatorname{grad}_x f_i + \frac{K_i}{m_i} \operatorname{grad}_v f_i = \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{\text{Stöße}} + \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{\text{evz}}, \quad (3.2)$$

die aussagt, daß die totale zeitliche Änderung der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte im Phasenraum von Teilchen mit der Masse  $m_i$  und der Krafteinwirkung  $K_i$  zur Zeit  $t$ , am Ort  $x$  und mit der Geschwindigkeit

keit  $v$  gerade gleich der Änderung dieser Dichte ist, die durch Stöße in diesem Volumenelement bewirkt wird  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{\text{Stöße}}$  oder die durch Erzeugung von entsprechenden Teilchen entstanden ist  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{\text{evz}}$ .

Unter bestimmten Annahmen über die Stoßvorgänge kann man die Größen  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{\text{Stöße}}$  durch Integrale über die unbekannten Funktionen  $f_i$  ausdrücken. Der Erzeugungsterm ist im allgemeinen recht schwierig zu erfassen, weshalb er meist vernachlässigt wird. In diesem Falle wird die Boltzmann-Gleichung zu einer nichtlinearen Integro-Differentialgleichung. Die makroskopischen Gleichungen erhält man durch Multiplikation mit entsprechenden Größen und Integration über den Geschwindigkeitsraum, also eine Mittelung über alle vorkommenden Geschwindigkeiten.

Da diese Probleme in ihrer Allgemeinheit mathematisch recht schwierig zu behandeln und nur in Spezialfällen und mit Näherungsannahmen exakt zu lösen sind, wollen wir für unsere Arbeit auf Grund der belegten Voraussetzungen aus Kapitel(2) die Methoden der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse mit geeigneten Modifikationen für das Plasma benutzen, da nur geringe Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht zugelassen sind. Wir betrachten dazu [74] eine Flüssigkeit, die aus  $n$  Komponenten - entsprechend der Zahl der verschiedenen Teilchensorten - besteht. Summiert man die Gleichungen, die die einzelnen Komponenten des Plasmas beschreiben, und führt anstelle der Variablen für die Teilkomponenten geeignete neue Variable ein, so erhalten wir die Gleichungen, die im folgenden abgeleitet werden, und die im Rahmen der Näherung das Verhalten des Plasmas beschreiben. Man spricht in diesem Falle von einem Einflüssigkeitsmodell. Durch die Randbedingungen, die an die Variablen gestellt werden müssen, werden dann die Gleichungen entsprechend der geometrischen Anordnung des Untersuchungsobjekts modifiziert.

#### 3.1. Die Zustandsgleichung

Wie die Thermodynamik lehrt, besteht zwischen den Zustandsvariablen Druck  $p$ , Temperatur  $T$  und Massendichte  $\varrho_m$  ein

funktionaler Zusammenhang, der mit Zustandsgleichung bezeichnet wird. Wenn wir als erste Näherung die Atome als Massenpunkte betrachten und keinen Wechselwirkungsmechanismus zwischen den Teilchen zulassen, dann ergibt sich die ideale Gasgleichung

$$p_i = n_i k T = g_{m_i} \frac{k}{m_i} T \quad (3.1.1)$$

für diesen funktionalen Zusammenhang, wobei  $n_i$  die Teilchenzahldichte,  $m_i$  die Masse der  $i$ . Teilchensorte und  $k$  die Boltzmannkonstante bedeuten.

Im Lichtbogenplasma sind die Teilchendichten wegen der hohen Temperatur trotz hoher Drucke so klein, daß immer mit den idealen Gasgesetzen gerechnet werden darf [19]. Einschränkungen dafür könnten einmal dadurch gegeben sein, daß die Fermionen z. B. die Elektronen für große Entartungsparameter  $F_{ent}$  (Teilchenzahl/ Zustandssumme) durch die Fermistatistik anstatt durch die Näherung der Boltzmannstatistik beschrieben werden müssen. In unserem Falle, wo der Entartungsparameter sehr viel kleiner als eins ist (charakteristischer Wert für Stickstoff:  $T = 10^4$  °K,  $p = 1$  atm ist  $F_{ent} = 10^{-6} - 10^{-5}$ ), ist aber keine Einschränkung zu erwarten. Eine andere Störung könnte durch das Vorhandensein der Plasmawechselwirkung verursacht werden. Jedoch läßt sich auch hier zeigen, daß bis zu extrem hohen Drücken die ideale Gasgleichung ihre Gültigkeit besitzt [19].

Wie wir aus diesen Vorbemerkungen ersehen, können wir also die ideale Gasgleichung in guter Näherung als Zustandsgleichung für die Plasmakomponenten benutzen. Wir definieren nun Variable, die das Verhalten des Plasmas als Ganzes beschreiben. Die Gesamtteilchenzahldichte  $n$  ergibt sich wie auch der Gesamtdruck  $p$  und die Dichte  $g_m$  als Summe der einzelnen Partialgrößen

$$n = \sum_i n_i, \quad (3.1.2)$$

$$p = \sum_i p_i, \quad (3.1.3)$$

$$g_m = \sum_i g_{m_i} = \sum_i m_i n_i. \quad (3.1.4)$$

Mit diesen Gleichungen und der Voraussetzung des thermischen Plasmas (siehe 2.2) erhalten wir durch Summation aller Gleichungen (3.1.1) folgendes Endresultat

$$p = n k T = k \bar{m}(p, T) g_m T, \quad (3.1.5)$$

wobei  $\bar{m}(p, T)$  gemäß folgender Beziehung als eine mittlere Masse der einzelnen Teilchen aufzufassen ist.

$$\bar{m} = \frac{\sum_i m_i n_i}{\sum_i n_i} = \frac{1}{n} \sum_i m_i n_i = \frac{g_m}{n} \quad (3.1.6)$$

Diese mittlere Masse läßt sich mit Hilfe der Zustandsgleichung (siehe 4.1) als Funktion von  $p$  und  $T$  unter der Voraussetzung der Quasineutralität des Plasmas (siehe 2.3) bestimmen. Im Falle eines 3-Komponentengases (Atome, Ionen, Elektronen) erhält man für  $\bar{m}$  den Ausdruck

$$\bar{m} = m_A \frac{1}{1 + \alpha(p, T)} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{n_{\text{Ionen}}}{n_{\text{Atome}} + n_{\text{Ionen}}} \quad (3.1.7)$$

$\alpha$  bedeutet hier der Ionisationsgrad des Gases und  $m_A$  die Atommasse.

### 3.2. Die Kontinuitätsgleichung der Masse

Aus der Tatsache, daß in einem festen Volumen die zeitliche Änderung der Dichte  $g_m$  gleich ist der in diesem Volumen erzeugten Masse  $\mathcal{G}$  und dem Massenzufluß durch die Oberfläche des Volumenelementes, ergibt sich folgende Beziehung, wenn wir die Geschwindigkeit der  $i$ . Komponente mit  $v_i$  bezeichnen

$$\frac{\partial g_{m_i}}{\partial t} + \text{div } g_{m_i} v_i = \mathcal{G}_i. \quad (3.2.1)$$

Die Massenproduktion kann in unserem Falle z. B. von Ionisations- oder Dissoziationsprozessen herrühren. Chemische Prozesse sind nicht zugelassen, da wir als Ausgangspunkt ein reines Gas annehmen. Da im nichtrelativistischen Fall die Gesamtmasse eine Erhaltungs-



größe darstellt, muß die Summe über die  $\mathcal{G}_i$  für alle vorkommenden Teilchensorten verschwinden

$$\sum_i \mathcal{G}_i = 0. \quad (3.2.2)$$

Wenn wir durch folgende Definition

$$\mathbf{v} = \frac{1}{g_m} \sum_i g_{m_i} \mathbf{v}_i \quad (3.2.3)$$

eine Schwerpunktgeschwindigkeit des Plasmas einführen, erhalten wir durch Summation der Gleichungen (3.2.1) unter Beachtung von (3.2.2) und (3.1.4) die Kontinuitätsgleichung der Masse

$$\frac{\partial g_m}{\partial t} + \operatorname{div} g_m \mathbf{v} = 0. \quad (3.2.4)$$

Führen wir hier im Hinblick auf die späteren Anwendungen Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$  ein und beachten, daß bei stationären achsenrotationssymmetrischen Flasmakonfigurationen die Abhängigkeit der einzelnen Größen von  $\varphi$  und  $t$  herausfällt, so stellt sich die Gleichung (3.2.4) in der Form dar

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r g_m u) + \frac{\partial}{\partial z} g_m w = 0. \quad (3.2.5)$$

Dabei sei  $\mathbf{v}$  der Vektor  $(u, v, w)$ .

### 3.3. Die erweiterte Navier-Stokessche Gleichung

Wenn wir das Newtonsche Gesetz auf ein Volumenelement einer Flüssigkeit anwenden, so erhalten wir für die  $i$ -Komponente der Flüssigkeit die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{m_i} \mathbf{v}_i + \operatorname{div} (\Phi_i - \tau_i) = K_i + \mathcal{G}_i Z_i. \quad (3.3.1)$$

Hierbei bedeuten  $\Phi_i$  der Impulsflußtensor,  $\tau_i$  der Spannungstensor,  $K_i$  die wirkenden Kräfte pro Volumeneinheit und  $\mathcal{G}_i Z_i$  die Impulsproduktion durch das Entstehen von neuen Teilchen der  $i$ . Sorte. Die wirkenden Volumenkräfte setzen sich aus äußeren und inneren Kräften zusammen, die elektromagnetischer und nicht elektrischer Natur sein

können. Die elektromagnetischen Kräfte besitzen elektrische und magnetische Komponenten. Wir können sie in folgender Form schreiben.

$$K_{el i} = g_{el i} [E + \mu_{el} (\mathbf{v}_i \times \mathbf{H})] + K_{el w i} \quad (3.3.2)$$

Hierbei bedeuten  $g_{el} = q_i n_i$  die Ladungsdichte,  $q_i$  die Ladung,  $K_{el w}$  die elektromagnetischen Wechselwirkungskräfte der Teilchensorte,  $\mu_{el}$  die magnetische Permeabilität,  $E$  und  $H$  die makroskopische elektrische und magnetische Feldstärke. Dabei verschwindet natürlich die Summe über alle Wechselwirkungskräfte

$$\sum_i K_{el w i} = 0. \quad (3.3.3)$$

Bei den nicht elektrischen Kräften wollen wir nur die Wechselwirkungskräfte berücksichtigen, deren Summe auf Grund des dritten Newtonschen Gesetzes ebenfalls verschwindet. Das gleiche gilt für die Summe über alle Impulsproduktionsterme

$$\sum_i \mathcal{G}_i Z_i = 0. \quad (3.3.4)$$

Von dem Spannungstensor können wir durch die Beziehung

$$\tau_i^{ek} = \tau_{i0}^{ek} - p_i \delta^{ek} \quad (3.3.5)$$

den totalen Druck, der sich aus dem Gasdruck und dem Strahlungsdruck zusammensetzt, abspalten.

Dabei ist natürlich der Strahlungsdruck in unserem betrachteten Parameterbereich zu vernachlässigen. Die Größe  $\tau_{i0}^{ek}$  ist bei makroskopischer Betrachtung mit anderen physikalischen Größen verknüpft, wie z. B. mit der Zähigkeit, mit den Temperatur- oder Konzentrationsgradienten, usw. Wir wollen den totalen Spannungstensor des Plasmas in der ersten Näherung entsprechend der Navier-Stokesschen Beziehung den entsprechenden Geschwindigkeitsgradienten proportional setzen.

$$\tau^{ek} = \sum_i (\tau_{i0}^{ek} - g_{m_i} w_i^e w_i^k) = \mu \left( \frac{\partial v^e}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^e} \right) + \mu_1 \operatorname{div} \mathbf{v} \delta^{ek} \quad (3.3.6)$$

Hierbei bedeuten  $w_i v_i$  die Diffusionsgeschwindigkeit der i. Komponente und  $\mu$  die Schichtviskosität.

Unter der üblichen Annahme, daß die Volumenviskosität verschwindet, ergibt sich für  $\mu_s$  ein Wert von

$$\mu_s = -2/3 \mu \quad (3.3.7)$$

Die Zähigkeit ist in unserem Falle eine Funktion der Temperatur und des Druckes. Eine Abhängigkeit von der elektrischen und magnetischen Feldstärke wird für unsere Verhältnisse nicht zu erwarten sein.

Wenn wir nun alle Gleichungen (3.3.1) addieren und unsere obigen Festlegungen beachten, erhalten wir mit Hilfe der Gleichung (3.2.4)

$$\sum_m \frac{Dv}{Dt} = \sum_m \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \text{grad } \frac{v^2}{2} - v \times \text{rot } v \right) = -\text{grad } p + g_{el} E + \mu_{el} (j \times H) + \text{div } \tau \quad (3.3.8)$$

Für die Divergenz des Tensors  $\tau$  erhalten wir aus (3.3.6) und (3.3.7)

$$\begin{aligned} \text{div } \tau = & \mu \left( \frac{4}{3} \text{grad div } v - \text{rot rot } v \right) + \text{rot } (v \times \text{grad } \mu) \\ & + \text{grad } (v \text{ grad } \mu) - v \text{ div grad } \mu + \frac{4}{3} \text{div } v \text{ grad } \mu \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Die Ladungsdichte  $g_{el}$  und die Stromdichte  $j$  sind dabei in üblicher Weise wie folgt definiert.

$$g_{el} = \sum_i g_{eli} = \sum_i q_i n_i \quad (3.3.10)$$

$$j = \sum_i g_{eli} v_i = \sum_i q_i n_i v_i \quad (3.3.11)$$

Durch Spezialisierung auf stationäre achsenrotationssymmetrische Anordnungen stellt sich Gleichung (3.3.8) unter Berücksichtigung der Quasineutralität wie folgt dar.

r-Komponente:

$$\begin{aligned} \sum_m \left( u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = & -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{4}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{4}{3} \frac{u}{r^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial r} \left( -\frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \mu_{el} (j_z H_z - j_z H_z) \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

φ-Komponente:

$$\begin{aligned} \sum_m \left( w \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w^2}{r} \right) = & \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial r} \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \\ & + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \mu_{el} (j_z H_r - j_r H_z) \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

z-Komponente:

$$\begin{aligned} \sum_m \left( w \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial r} \right) = & -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \\ & + \frac{\partial \mu}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left( -\frac{2}{3} \frac{u}{r} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{4}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu_{el} (j_r H_z - j_z H_r) \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

### 3.4. Die Energiebilanz

Ganz analog zu (3.2) und (3.3) erhalten wir, wenn wir eine Energiebilanz für die i. Teilchensorte aufstellen, folgende Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_m \epsilon_{mi} + \text{div} (\sum_m \epsilon_{mi} v_i - v_i \tau_i + Q_i) = \epsilon_i \quad (3.4.1)$$

Hierbei bedeuten  $\epsilon_{mi}$  die totale Energie pro Masseneinheit und  $\epsilon_i$  die Energieproduktion pro Volumeneinheit der i. Komponente des Plasmas. Die Größe  $Q_i$  setzt sich aus dem Wärmestrom  $Q_{ic}$  und dem Strahlungsfluß  $Q_{rad i}$  additiv zusammen. Die totale Energie  $\epsilon_{mi}$  berücksichtigt die innere Energie  $u_{mi}$ , die kinetische Energie  $\frac{v_i^2}{2}$ , eventuell eine potentielle Energie, die aber in dieser Arbeit unbeachtet bleiben soll (3.3.) und die Strahlungsenergie  $E_{rad} / g_{mi}$

$$\epsilon_{mi} = u_{mi} + \frac{v_i^2}{2} + E_{rad i} / g_{mi} \quad (3.4.2)$$

Bei dem Energieproduktionsterm  $\epsilon_i$  werden wir, da chemische Reaktionen nicht zugelassen sind, nur die ohmsche Heizung als wesentlichen Faktor zu berücksichtigen haben.

Die gesamte innere Energie des Plasmas setzt sich aus den inneren Energien und der kinetischen Energie auf Grund der verschiedenen Diffusionsgeschwindigkeiten zusammen. Man erhält

$$u_m = \frac{1}{g_m} \sum_i (g_{m_i} u_{m_i} + \frac{1}{2} g_{m_i} w_i^2) \quad (3.4.3)$$

Dabei müssen natürlich die Ionisations- und Dissoziationsenergien ihre Berücksichtigung finden. Die Strahlungsenergie des Plasmas als Ganzes ergibt sich aus der Summation der Teilkomponenten.

$$E_{rad} = \sum_i E_{rad,i} \quad (3.4.4)$$

Der Gesamtwärmestrom und Gesamtstrahlungsfluß können in folgender Form dargestellt werden

$$Q_c^k = \sum_i (Q_{c,i}^k + T_{i0}^k w_i^e - p_i w_i^k + \sum_j g_{m_i} w_i^e w_j^k - g_{m_i} (u_{m_i} + \frac{1}{2} w_i^2) w_i^k) \quad (3.4.5)$$

$$Q_{rad}^k = \sum_i (Q_{rad,i}^k - E_{rad,i} w_i^k),$$

wobei der Strahlungsdruck wieder vernachlässigt wurde. Wie wir sehen, werden die beiden Ströme durch eine sehr komplizierte Teilchenbewegung hervorgerufen. In erster Näherung werden wir gemäß des Fourierschen Ansatzes den Wärmestrom proportional zum Temperaturgradienten annehmen können. Wir setzen also

$$Q_c = -\kappa \text{grad} T \quad (3.4.6)$$

Die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  wird dabei natürlich sehr stark von der Temperatur und vom Druck abhängen. Die Abhängigkeit von den elektrischen Feldgrößen werden wir in unserem Falle vernachlässigen können. Da wir in dieser Arbeit nur optisch dünne Bögen betrachten, berücksichtigen wir die Strahlung nur insoweit, als wir nur eine spezifische Abstrahlung pro Volumeneinheit  $\bar{u}(T, p)$  annehmen. Die gesamte ohmsche Aufheizung ergibt sich aus den Maxwell'schen Gleichungen zu

$$\mathcal{E} = \sum_i \mathcal{E}_i = j E \quad (3.4.7)$$

Mit diesen Vorbemerkungen erhält die Gesamtenergiebilanz die folgende Form, indem wir alle Gleichungen (3.4.1) addieren und Gleichung (3.2.4)

beachten.

$$g_m \frac{D}{Dt} (u_m + \frac{1}{2} v^2) = v \text{div} \tau + \mu \Phi - p \text{div} v + \text{div} \kappa \text{grad} T + j E - \bar{u} \quad (3.4.8)$$

Wenn wir Gleichung (3.3.8) skalar mit  $v$  multiplizieren und den Ausdruck  $v \text{div} \tau$  in Gleichung (3.4.8) einsetzen, so vereinfacht sich die obige Gleichung unter Berücksichtigung der Quasineutralität zu

$$g_m \frac{D}{Dt} (u_m + \frac{p}{g_m}) = \frac{Dp}{Dt} + \text{div} \kappa \text{grad} T + j E - \mu_{el} v (j \times H) + \mu \Phi - \bar{u} \quad (3.4.9)$$

Mit dem Ausdruck für die Enthalpie des Plasmas pro Masseneinheit

$$h = u_m + \frac{p}{g_m} \quad (3.4.10)$$

und dem erweiterten ohmschen Gesetz (siehe 3.6) reduziert sich die Energiebilanz zu der endgültigen Form

$$g_m \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \text{div} \kappa \text{grad} T + \frac{j^2}{\sigma} - \bar{u} + \mu \Phi \quad (3.4.11)$$

$\Phi$  heißt die Dissipationsfunktion. Sie gibt im wesentlichen an, wieviel Energie durch Reibung in Wärme umgewandelt wird.

Wenn wir (3.4.11) für stationäre achsenrotationssymmetrische Anordnungen umschreiben, so erhalten wir

$$g_m (u \frac{\partial h}{\partial r} + w \frac{\partial h}{\partial z}) = u \frac{\partial p}{\partial v} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} v \kappa \frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{6} (j_v^2 + j_\theta^2 + j_z^2) - \bar{u} + \mu [2 (\frac{\partial u}{\partial v})^2 + 2 (\frac{u}{v})^2 + 2 (\frac{\partial w}{\partial z})^2 + (\frac{\partial v}{\partial z})^2 + (\frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{u}{v})^2 - \frac{2}{3} (\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{v} + \frac{\partial u}{\partial v})^2] \quad (3.4.12)$$

### 3.5. Die Maxwell'schen Gleichungen

Die Maxwell'schen Gleichungen liefern uns eine Verknüpfung der makroskopischen elektrischen und magnetischen Feldstärke mit

dem Strom, der von der Bewegung der einzelnen Plasmakomponenten herrührt. Die Beziehungen sind gegeben durch das Durchflutungs-gesetz

$$\text{rot } H = j + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (3.5.1)$$

und durch das Induktionsgesetz

$$\text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (3.5.2)$$

Für stationäre Vorgänge folgt aus (3.5.2) sofort die Existenz eines elektrischen Potentials  $\varphi$

$$E = - \text{grad } \varphi \quad (3.5.3)$$

Indem wir die Divergenz von (3.5.2) bilden, erkennen wir die Quellenfreiheit des B Feldes

$$\text{div } B = 0. \quad (3.5.4)$$

Der Satz von der Erhaltung der elektrischen Ladung liefert uns eine weitere wichtige Beziehung. Um die entsprechende Bilanzgleichung zu erhalten, multiplizieren wir Gleichung (3.2.1) mit  $q_i/m_i$ . Da die Gesamtladung konstant sein muß, ergibt sich daraus durch Addition der Gleichungen und Berücksichtigung der Definitionen (3.3.10) und (3.3.11)

$$\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} + \text{div } j = 0. \quad (3.5.5)$$

Bildet man von Gleichung (3.5.1) die Divergenz und eliminiert aus (3.5.5) die Divergenz des Stromes, so folgt die Poissongleichung

$$\text{div } D = \rho_{el}. \quad (3.5.6)$$

Betrachtet man wieder nur stationäre achsenrotationssymmetrische Anordnungen, so lauten die ausgeschriebenen Gleichungen in der gleichen Reihenfolge wie oben

$$- \frac{\partial H_z}{\partial r} = j_\varphi \quad (3.5.7)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = j_\varphi \quad (3.5.7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) = j_z$$

$$- \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0 \quad (3.5.8)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) = 0$$

$$E = (E_r, 0, E_z) = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r}, 0, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \quad (3.5.9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (3.5.10)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_r) + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0 \quad (3.5.11)$$

$$\rho_{el} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (3.5.12)$$

Wir sehen, daß in diesem Falle die  $\varphi$ -Komponente der elektrischen Feldstärke identisch verschwinden muß.

### 3.6. Die phänomenologischen Gleichungen

Wie wir aus der Thermodynamik wissen, setzt sich die positivdefinite Entropieproduktion aus Summanden zusammen, die aus Produkten von Flüssen und Kräften gebildet sind. Die Flüsse und Kräfte sind dabei nicht unabhängig voneinander. In der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse setzt man deshalb die Flüsse bzw. Kräfte in erster Näherung als Linearkombinationen der Kräfte bzw. Flüsse an. Die entsprechenden Koeffizienten sind bei mikroskopischer Reversibilität durch die Onsager-Casimirschen Reziprozitätsbedingungen verknüpft. Um also eine exakte Theorie aufstellen zu können, hätten wir alle eventuell in einem Plasma vorhandenen Kräfte

und Flüsse berücksichtigen müssen. Leider werden dadurch die Gleichungen sehr kompliziert. Wir müssen uns deshalb auf die wichtigsten und einflußreichsten Kräfte beschränken. Außerdem wollen wir die Koeffizienten als skalare Funktionen betrachten, anstatt sie in ihrer Allgemeinheit als Tensoren zu behandeln. Auswirkungen dieser Vereinfachungen haben wir schon in den Gleichungen (3.3.6), (3.4.6) und (3.4.8) berücksichtigt. Weitere Vereinfachungen wollen wir bei dem Zusammenhang zwischen elektrischer Feldstärke und Verschiebungsdichte bzw. zwischen magnetischer Feldstärke und der magnetischen Induktion treffen. Wir wollen in erster Näherung annehmen, daß sich die Beziehungen zwischen den Größen vom Vakuumzustand nicht wesentlich unterscheiden.

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (3.6.1)$$

$$\mathbf{B} = \mu_{el} \mathbf{H} \quad (3.6.2)$$

Hierbei bedeuten  $\epsilon_0$  die absolute Dielektrizitätskonstante und  $\mu_{el}$  die absolute Permeabilität. Eine weitere wichtige Beziehung müssen wir für den elektrischen Strom ableiten. Wenn wir Gleichung (3.3.1) mit  $q_e/m_e$  multiplizieren und alle Gleichungen addieren, so ergibt sich eine Beziehung für die zeitliche Änderung des Stromes, die aber in ihrer Allgemeinheit viel zu kompliziert ist, um sie analysieren zu können. Anstelle dieser Gleichung benutzt man deshalb eine Näherung, die als verallgemeinertes Ohmsches Gesetz bezeichnet wird.

$$\mathbf{j} = \mathcal{G} (\mathbf{E} + \mu_{el} (\mathbf{v} \times \mathbf{H})) + \mathcal{G}_{el} \mathbf{v} \quad (3.6.3)$$

Hierbei bedeutet  $\mathcal{G}$  die elektrische Leitfähigkeit, die natürlich wiederum als eine Funktion von Temperatur und Druck anzusehen ist. Die Abhängigkeit von den elektrischen Größen soll vernachlässigt werden. Da  $\mathcal{G}$  als Skalar aufgefaßt wird, wird der Hallstrom vernachlässigt. Die Berücksichtigung der Quasineutralität, d.h. die Vernachlässigung des Konvektionsstromes gegen den Leitungsstrom, liefert für die Komponenten von (3.6.3) folgende Beziehungen

$$j_x = \mathcal{G} (E_x + \mu_{el} (v_y H_z - v_z H_y))$$

$$j_y = \mathcal{G} (E_y + \mu_{el} (v_z H_x - v_x H_z)) \quad (3.6.4)$$

$$j_z = \mathcal{G} (E_z + \mu_{el} (v_x H_y - v_y H_x))$$

### 3.7. Die Randbedingungen

Wir haben in den obigen Abschnitten Beziehungen abgeleitet, die ein Plasma unter den angegebenen Näherungen beschreiben. Für die unbekannten Größen

$$\rho, \mathcal{G}, T, u, v, w, E_x, E_y, E_z, j_x, j_y, j_z, H_x, H_y, H_z, D_x, D_y, D_z, B_x, B_y, B_z, \mathcal{G}_{el}$$

sind 22 partielle Differentialgleichungen und gewöhnliche Gleichungen zu lösen, die im allgemeinen Falle untereinander gekoppelt sind. Als Lösung ergibt sich die ungeheure Vielfalt von allen möglichen Lichtbogenanordnungen. Um diese Mannigfaltigkeit von Lösungen auf die verschiedenen geometrischen Konfigurationen von Lichtbögen zu spezialisieren, sind Randbedingungen und Anfangsbedingungen erforderlich. Diese sondern gleichzeitig die physikalisch sinnvollen Lösung aus.

Als allgemeine sinnvolle Bedingung ist an alle obigen Größen die Forderung der Endlichkeit und Stetigkeit zu stellen. Weiter müssen die obigen Größen auf Grund der oben erwähnten Erhaltungssätze Bedingungen erfüllen. Am Rand  $C$  des als ruhend betrachteten Volumens müssen nämlich die Normalkomponenten des Wärmestromes, der Geschwindigkeit, des Stromes und der magnetischen Induktion stetig sein.

$$Q_{cn}, v_n, j_n, B_n \text{ stetig auf } C. \quad (3.7.1)$$

Wenn keine Flächenladungen vorhanden sind, muß auch die Normalkomponente von  $D$  stetig sein.

Weiter sind am Rande des Lösungsgebietes die Tangential-

komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke stetig.

$$E_t \text{ und } H_t \text{ stetig auf } C. \quad (3.7.2)$$

Die Tangentialkomponenten der Geschwindigkeit muß wegen der Reibung gleich der Geschwindigkeit der Wand sein. Wenn diese ruht, gilt also

$$v_t = 0. \quad (3.7.3)$$

Weiter sind noch verschiedene Größen, z. B. die Temperatur an der Wand in Abhängigkeit von der Zeit anzugeben, um das Verhalten eindeutig zu bestimmen. Dabei müssen natürlich die Bedingungen mit den obigen Gleichungen in Einklang stehen.

#### 4. THEORETISCHE ERGEBNISSE UND EXPERIMENTELLE MÖGLICHKEITEN ZUR BESTIMMUNG DER BENÖTIGTEN MATERIALFUNKTIONEN MIT ANWENDUNG AUF STICKSTOFF - UND ARGONPLASMEN

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, daß zu der makroskopischen Beschreibung eines Plasmas neben den Grundgleichungen und den Randbedingungen noch eine Reihe von Funktionen nötig sind, die die Eigenschaften und die spezifischen Gegebenheiten der verschiedenen Arbeitsstoffe berücksichtigen. Aus diesem Grunde werden diese Funktionen unter dem Begriff Materialfunktionen zusammengefaßt.

Genau wie bei den Grundgleichungen geht eine exakte Bestimmung der Materialfunktionen von den Boltzmann-Gleichungen aus (siehe(3)). Jedoch ist auch hier eine explizite oder auch nur eine implizite Lösung nur in den seltensten Fällen und mit sehr starken Näherungsannahmen möglich. Eine recht gute Approximation erhält man für den Fall eines sog. Lorentzgases. Bei diesem handelt es sich um ein hypothetisches vollständig ionisiertes Plasma, bei dem die Ionen gegenüber den Elektronen als ruhend angenommen werden und die Nahstöße der Elektronen untereinander vernachlässigt werden. Für diesen Fall gelingt eine explizite Berechnung von verschiedenen Material-

funktionen, wenn man nur geringe Abweichungen von thermodynamischem Gleichgewicht zuläßt.

Für andere Fälle ist man z. T. auf klassische Näherungen angewiesen, die entsprechend den Gegebenheiten im Plasma modifiziert werden müssen.

Die Materialfunktionen sind im allgemeinen von vielen makroskopischen Größen abhängig. Da in unserem Falle die elektrischen und magnetischen Feldgrößen relativ klein sind, werden wir nur die Abhängigkeit von der Temperatur und dem Druck beachten müssen. Ebenso können wir die Funktionen als Skalare behandeln, anstatt, wie im allgemeinen Fall, ihren Tensorcharakter berücksichtigen zu müssen.

Der beste Weg zur Bestimmung der Materialfunktionen wird sich wohl nur durch einen Vergleich von theoretischen und halbexperimentellen Werten ergeben. Es müssen also theoretisch durchsichtige und experimentell und geometrisch relativ einfach zu verifizierende Versuchsanordnungen gefunden werden, die auf Grund von Messungen, die das Plasmaverhalten nicht wesentlich stören, eine relativ einfache Bestimmung der Materialfunktionen aus makroskopischen Größen zulassen. Da die Temperatur nie über den untersuchten Bereich konstant ist, ergeben sich, wie wir weiter unten noch genauer sehen werden, meist Integralgleichungen für die unbekannten Funktionen, die zum Teil numerisch mit einem Digitalrechner gelöst werden müssen. Um eine möglichst gute Genauigkeit für die gesuchten Werte zu erreichen, sollen Experimente untersucht werden, wo die gesuchte Materialfunktion einen starken Einfluß auf die Meßgrößen ausübt. Im folgenden sollen einige Wege hierzu in Verbindung mit theoretischen Überlegungen angegeben werden.



#### 4.1. Die Dichte und die Enthalpie

In (3.1) wurde festgestellt, daß bei Kenntnis von zweien der drei Zustandsgrößen  $p, \rho_m, T$  die dritte eindeutig durch Gleichung (3.1.5) bestimmt ist, wenn die dort definierte mittlere Masse  $m(p, T)$  als Funktion von Temperatur und Druck bekannt ist. Um sie zu berechnen, müssen wir gemäß ihrer Definition (3.1.6) die Partialteilchendichten als Funktion der Temperatur und des Gesamtdruckes kennen. Ebenfalls sind diese Größen zur Bestimmung der thermodynamischen Potentiale und Funktionen erforderlich. Die numerische Berechnung dieser Werte gelingt bei Berücksichtigung der Quasineutralität des Plasmas mit Hilfe des Massenwirkungsgesetzes bzw. der Sahagleichung für die verschiedenen Reaktionen. Diese Beziehungen werden aus der Bedingung erhalten, daß bei konstanter Temperatur und Druck die Variation der gesamten freien Enthalpie im thermodynamischen Gleichgewicht verschwinden muß. Bei der Berechnung der thermodynamischen Funktionen muß die Zustandssumme bekannt sein, in der Translations-, Rotations-, Oszillations-, Elektronenanregungs- und Trennungsenergie ihre Berücksichtigung finden müssen [19]

Numerische Ergebnisse nach dieser Methode werden in [8, 9] angegeben. Die berechneten Dichten von Argon bzw. Stickstoff werden in den Abb. 1 und 2 als Funktion der Temperatur bei Atmosphärendruck dargestellt. Die Enthalpie und die spezifische Wärme bei konstantem Druck von Stickstoff sind in Abb. 3 bei Atmosphärendruck als Funktion des Wärmestrompotentials (s. 4.2) aufgezeichnet. Die Extremwerte sind durch die Beiträge der Dissoziation und Ionisation zu erklären.

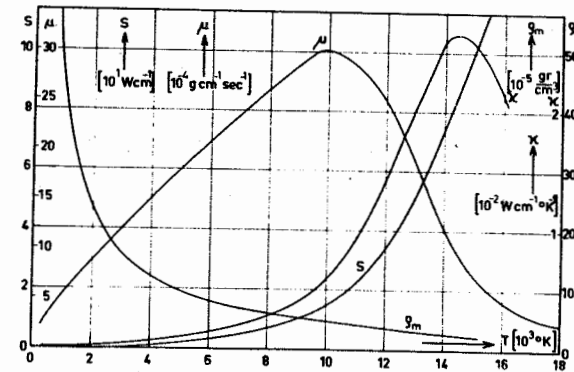


Abb. 1 Die Wärmeleitfähigkeit, das Wärmestrompotential, die Dichte und die Zähigkeit von Argon als Funktion der Temperatur bei Atmosphärendruck

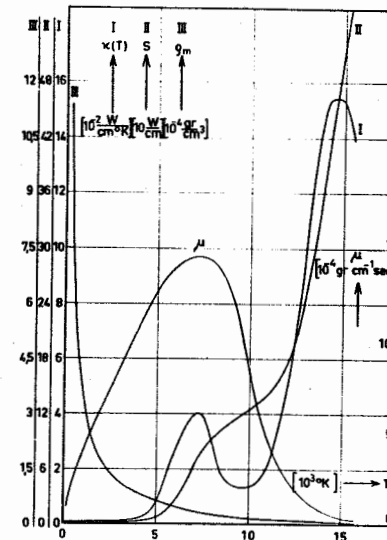


Abb. 2 Die Wärmeleitfähigkeit, das Wärmestrompotential, die Dichte und die Zähigkeit von Stickstoff als Funktion der Temperatur bei Atmosphärendruck

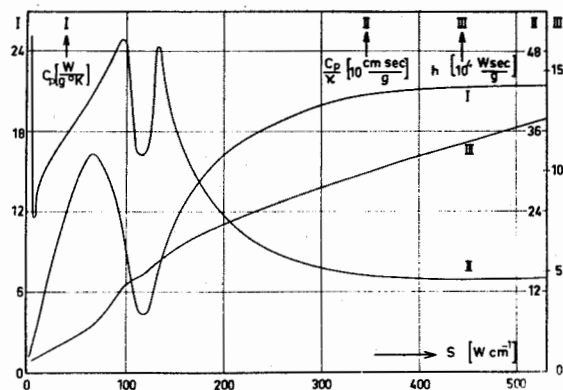


Abb. 3 Die Enthalpie, die spezifische Wärme bei konstantem Druck und das Verhältnis von spezifischer Wärme zur Wärmeleitfähigkeit von Stickstoff als Funktion des Wärmestrompotentials bei Atmosphärendruck.

#### 4.2 Die elektrische Leitfähigkeit, die spezifische Abstrahlung von optisch dünnen Bögen und die Wärmeleitfähigkeit

Wie wir in Kapitel(2) gesehen haben, ist die elektrische Leitfähigkeit wohl die charakteristischste Materialfunktion eines Plasmas. In Erweiterung zu ihrer klassischen Definition als Proportionalitätsfaktor zwischen Stromdichte und elektrischer Feldstärke wollen wir sie für ein Plasma, wo diese Festlegung keine allgemeine Gültigkeit mehr besitzt, aus der pro Volumeneinheit zugeführten elektrischen Leistung  $P_{el}$  und der Stromdichte definieren.

$$P_{el} = \int \frac{1}{\sigma} j^2 dV \quad (4.2.1)$$

In dem Fall, wo nur kleine elektrische Feldstärken auf die Ladungsträger einwirken und wo der Einfluß der anderen Kräfte zu vernachlässigen ist, stimmt die obige Definition mit der klassischen überein.

Um eine erste Abschätzung über die Größe der elektrischen Leitfähigkeit zu erhalten, kann man von der Bewegung eines Ladungsträgers im homogenen elektrischen Feld ausgehen. Durch Übertragung der entsprechenden Größen mit Hilfe einer Mittelung auf ein Teilchenensemble, das vom thermischen Gleichgewicht nicht wesentlich abweicht, erhält man folgende elementare Formel für die Leitfähigkeit

$$G = \sum_i \frac{q_i^2 n_i \lambda_i}{m_i \bar{v}_i} \quad (4.2.2)$$

Hierbei bedeuten  $\lambda_i$  die mittlere freie Weglänge und  $\bar{v}_i$  die mittlere thermische Geschwindigkeit der  $i$ . Teilchensorte (siehe 4.3.). Diese Formel kann natürlich nur eine erste Näherung darstellen.

Um eine größere Genauigkeit zu erhalten, muß man von der Boltzmanngleichung ausgehen. (Siehe(3)). Da die Elektronen wegen ihrer geringen Masse den Hauptanteil zur Leitfähigkeit beisteuern, wird im allgemeinen [76] nur der Beitrag der Elektronen berücksichtigt. Wenn wir in einem vollständig ionisierten Plasma ein homogenes stationäres Stromfeld in einem homogenen Medium betrachten, so erhält die Boltzmanngleichung folgende Form

$$\frac{q \cdot E}{m_e} \cos \gamma \frac{\partial f_e(v)}{\partial v} = \left( \frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{\text{Stöße}} \quad (4.2.3)$$

wo  $\gamma$  der Winkel zwischen der Geschwindigkeit  $v$  und der elektrischen Feldstärke bedeutet. Der Stoßterm wurde von Rosenbluth, MacDonald und Judd [54] untersucht. Die Lösung der dann resultierenden Gleichung ist sehr komplex und unübersichtlich.

Nur im Falle eines Lorentzgases kann man explizit folgenden Ausdruck für die elektrische Leitfähigkeit angeben.

$$G_L = \frac{2 (2kT)^{3/2}}{\pi^{1/2} m_e^{1/2} Z e^2 c_0^2 \ln \Lambda} \quad (4.2.4)$$

wo  $Z$  die Zahl der Elementarladungen der Ionen angibt und  $\Lambda$  sich aus dem Verhältnis der Debyelänge (siehe (2.3.3)) zu dem Stoßparameter berechnet, bei dem die Ablenkung auf der Kugeloberfläche  $90^\circ$  beträgt. Setzt man Zahlenwerte ein, so ergibt sich folgender Ausdruck

$$G_L / \Omega^{-1} \text{cm}^{-1} = 0,2635 \cdot 10^{-3} (T/^\circ\text{K})^{3/2} \cdot \frac{1}{Z e n \Lambda} \quad (4.2.5)$$

Wenn man die Elektronenwechselwirkung in erster Näherung berücksichtigt [76], dann ergibt sich, daß die Leitfähigkeit proportional zur Leitfähigkeit des Lorentzgases wird, wobei der Proportionalitätsfaktor  $\gamma_E$  von der Ladung der Ionen abhängt,

$$G = \gamma_E G_L. \quad (4.2.6)$$

Bei dieser Ableitung wurde natürlich wieder berücksichtigt, daß die aus dem Feld aufgenommene Energie klein sein soll gegen die thermische Energie der Teilchen.

Die Berechnung der Abstrahlung gestaltet sich schwieriger, da im allgemeinen Fall sowohl die Linienstrahlung als auch die Bremsstrahlung und Zyklotronstrahlung berücksichtigt werden müssen. Außerdem ist zu beachten, daß für die Strahlung kein thermisches Gleichgewicht bei den von uns betrachteten optisch dünnen Bögen vorliegt.

Zur ersten groben Abschätzung der Größe der Abstrahlung kann man von der Voraussetzung ausgehen, daß alle Atome nur zu einem angeregten Zustand fähig wären. Man erhält dann für die Abstrahlung nach [19] folgende Formel

$$\bar{u} = A/T e^{-B/T}. \quad (4.2.7)$$

Eine bessere Näherung für unseren Fall ergibt sich nach einer Bemerkung von Unsöld, in dem man sich eng an Einsteins Ableitung der Planckschen Strahlungsformel hält. Nach Pelzer [47] ergibt

sich folgender Ausdruck für die spezifische Abstrahlung

$$\bar{u}(\tau, \rho) = \frac{128 \pi^3}{3 \cdot 15} \cdot \frac{e^6}{c_0^2 (2 \pi m)^{3/2}} \cdot \frac{\kappa^{1/2}}{\Lambda} n_e \sum_i Z_i^2 n_{i+} \frac{h \nu_{ji} / \kappa + T}{T} \quad (4.2.8)$$

wobei die Summation über alle Ionensorten zu erstrecken ist.

$\nu_j$  bedeutet eine Grenzfrequenz, die aus dem Termschema so zu bestimmen ist, daß bis zu dieser Frequenz die Terme als dichtliegend angesehen werden können. Eine gewisse Unsicherheit besteht bei der Wahl der effektiven Kernladungszahl  $Z_{\text{eff}}$  des j. Ions. Der genaue Wert kann nur aus experimentellen Werten gefunden werden.

Noch weniger als die elektrische Leitfähigkeit läßt sich die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  eines Plasmas einfach übersehen. Die Gesamtwärmeleitfähigkeit kann man sich nach Meixner [46] aus drei Anteilen additiv zusammengesetzt denken.

1. Wärmeleitfähigkeit bei gehemmter Reaktion der einzelnen Komponenten (Kontaktwärmeleitfähigkeit).
2. Wärmeleitfähigkeit durch Transport von Reaktionsenergie (Reaktionswärmeleitfähigkeit).
3. Wärmeleitfähigkeit durch Thermodiffusion und Diffusionsthermoeffekt.

Die Wärmeleitfähigkeit bei gehemmter Reaktion entspricht dem, was im allgemeinen in der kinetischen Gastheorie unter Wärmeleitung versteht. Sie wird klassisch nach [6] für jede Komponente des Plasmas gegeben durch

$$\kappa_{\kappa i} = \frac{n_i}{3} \bar{v}_L \lambda_i c_{v_i}. \quad (4.2.9)$$

Bei der spezifischen Wärme müssen für ein Plasma die translatorischen und inneren Freiheitsgrade berücksichtigt werden. Durch Summation über alle Komponenten erhält man die Kontaktwärmeleitfähigkeit.

Die Reaktionswärmeleitfähigkeit ist bei Molekulargasen die entscheidende Größe. Hier sind vor allem der Dissoziations- und

Ionisationsbeitrag zu nennen, deren maximale Beträge in verschiedenen Temperaturbereichen liegen (siehe Abb. 1 und 2).

Die Beiträge der Thermodiffusion und Diffusionsthermik der schweren Teilchen sind verglichen mit den anderen Beiträgen klein wie in [6] gezeigt wird, so daß man sie vernachlässigen kann. Zu berücksichtigen ist aber der Beitrag der Elektronen. Für ein Lorentzgas wurde der Thermodiffusionsfaktor  $\alpha$  zum ersten Mal von Waldmann berechnet. Waldmann und Clusius haben dann diesen Anteil auch erstmalig experimentell nachgewiesen. [86].

Die obigen Ergebnisse sind natürlich wieder nur erste Näherungen. Die exakten Ergebnisse sind aus der Boltzmann-Gleichung abzuleiten. Hierbei sind auch unter Umständen thermoelektrische Effekte zu berücksichtigen. Für ein Lorentzgas erhält man folgenden expliziten Ausdruck für die Wärmeleitfähigkeit

$$\kappa_L = 20 (2/\pi)^{3/2} \frac{k (kT)^{5/2}}{m_e^{1/2} e^4 Z \ln \Lambda} \quad (4.2.10)$$

oder wenn man die Zahlenwerte einsetzt

$$\kappa / \text{erg sec}^{-1} \text{ cm}^{-1} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1} = 1,86 \cdot 10^{-4} \frac{(T/^\circ\text{K})^{5/2}}{Z \ln \Lambda} \quad (4.2.11)$$

Die Berücksichtigung der Elektronenwechselwirkung liefert nach Spitzer und Härm [75] wie bei der elektrischen Leitfähigkeit einen Proportionalitätsfaktor  $\delta_T$ , der von der Ladung der Ionen abhängt.

$$\kappa = \delta_T \kappa_L \quad (4.2.12)$$

Nachdem wir nun auf einige theoretische Möglichkeiten zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit, der spezifischen Abstrahlung und der Wärmeleitfähigkeit eingegangen sind, wollen wir auf eine halbexperimentelle Methode zur Berechnung dieser Funktionen hinweisen, nach der auch die später benötigten Materialfunktionen für ein Stickstoff- und Argonplasma bestimmt wurden.

Man betrachtet dazu einen wandstabilisierten zylindersymmetrischen Lichtbogen ohne Konvektion, der am besten in einem Kaskadenbogen realisiert werden kann [6, 39]. Die Grundgleichungen reduzieren sich für diesen Fall wie in [5] gezeigt wird, auf die Energiebilanz, die Stromtransportgleichung und die Formel für die pro Längeneinheit abgestrahlte Energie. Wenn wir von der magnetischen Kompression absehen (siehe (5.2.3)), so können wir den Druck im Bogen als konstant ansehen. In diesem Fall wird das elektrische und thermische Verhalten eindeutig durch die oben erwähnten Gleichungen und drei Randbedingungen für die Temperatur beschrieben. Umgekehrt muß es dann möglich sein, aus geeigneten experimentellen Informationen die drei Materialfunktionen elektrische Leitfähigkeit, spezifische Abstrahlung und Wärmeleitfähigkeit, die dieses Verhalten bestimmen, als Funktion der Temperatur bei konstantem Druck zu berechnen. Zur Information dürfen dabei nur solche Größen berücksichtigt werden, bei deren Messung der Bogen nicht gestört wird. Solche Meßgrößen sind die Feldstärke, der Strom, die gesamte abgestrahlte Leistung und die Temperatur.

Es wurden nun verschiedene Methoden von Maecker [39, 40] und unserer Gruppe [65, 66, 68, 69, 70, 85] entwickelt, das oben dargelegte Verfahren praktisch durchzuführen. Selbstverständlich werden natürlich der mathematische Aufwand und die numerischen Rechnungen um so aufwendiger, je genauer man innerhalb der Meßgenauigkeit die experimentellen Größen der Materialfunktionen berechnen will. In Abbildungen 4 und 5 sind die nach [70, 85] berechnete Leitfähigkeit und spezifische Abstrahlung für Argon und Stickstoff bei Atmosphärendruck über dem Wärmestrompotential (siehe 5.1) aufgetragen.

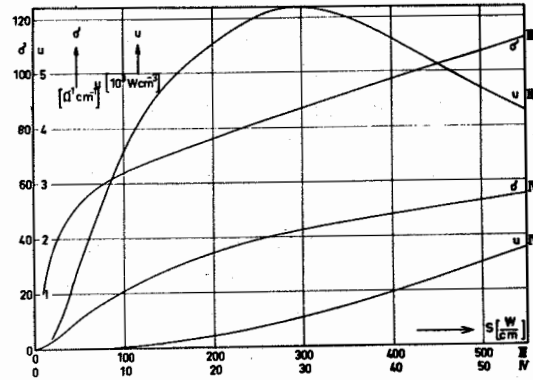


Abb. 4 Die elektrische Leitfähigkeit und die spezifische Abstrahlung von Argon als Funktion des Wärmestrompotentials bei Atmosphärendruck

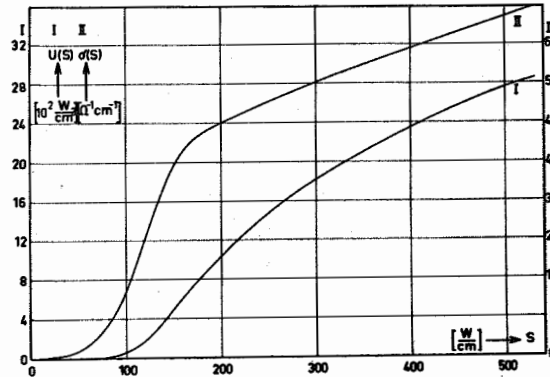


Abb. 5 Die elektrische Leitfähigkeit und die spezifische Abstrahlung von Stickstoff als Funktion des Wärmestrompotentials bei Atmosphärendruck

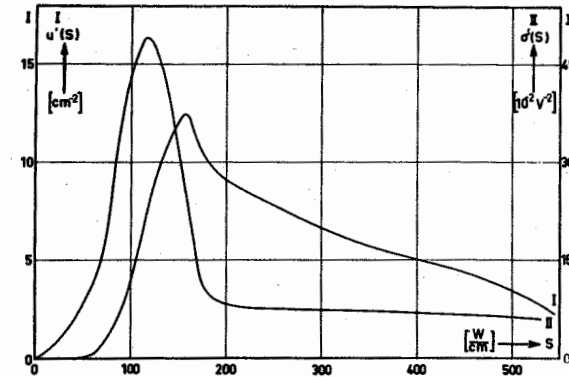


Abb. 6 Die Ableitungen der elektrischen Leitfähigkeit und der spezifischen Abstrahlung von Stickstoff als Funktion des Wärmestrompotentials bei Atmosphärendruck

Die Ableitungen dieser Funktionen nach dem Wärmestrompotential für Stickstoff sind in Abb. 6 dargestellt. Diese Funktionen werden für die späteren Rechnungen (siehe(7)) benötigt. Sie wurden durch graphische Differentiation mit Hilfe eines Derivimeters aus den Funktionen in Abb. 5 gewonnen. Zur Überprüfung der Genauigkeit wurden diese Wert mit einem Polarplanimeter integriert und mit den exakten Daten verglichen.

Man erkennt, daß die Leitfähigkeit beider Gase für kleine Temperaturen in Form eines Potenzgesetzes geschrieben werden kann

$$\sigma = A \left( S/S_0 \right)^n \quad 0 \leq S \leq S_c \quad (4.2.13)$$

Aus der doppeltlogarithmischen Darstellung ergeben sich folgende

Zahlenwerte für den Exponenten und die anderen Größen

Argon:  $n = 1,7$ ;  $A = 1 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ ,  $S_0 = 1 \text{ W cm}^{-1}$ ,  $S_c \approx 3 \text{ W cm}^{-1}$

Stickstoff:  $n = 2,6$ ;  $A = 6,6 \cdot 10^{-5} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ ,  $S_0 = 1 \text{ W cm}^{-1}$ ,  $S_c = 60 \text{ W cm}^{-1}$

Für größere S-Werte steigen beide Funktionen mit einer Potenz  $n = 3/7$  an. Der Grund hierfür soll in (5. 5. 2) angegeben werden.

Die spezifischen Abstrahlungen besitzen beide ein Maximum ( $\bar{u}_H = 6,2 \text{ kW/cm}^3$  bei Argon;  $\bar{u}_H = 3 \text{ kW/cm}^3$  bei Stickstoff), deren Höhe sich ungefähr um den Faktor 2 unterscheidet.

Die Lage des Maximums (Argon:  $S = 300 \text{ W cm}^{-1}$ , Stickstoff:  $S = 600 \text{ W cm}^{-1}$ ) wird in erster Linie vom Extremwert der Ionenzahl bestimmt, wie die Formel von Pelzer zeigt (siehe (4. 2. 8)).

Da Temperaturmessungen für Stickstoffbögen vorliegen [40], wurde die Wärmeleitfähigkeit für diesen Arbeitsstoff nach der oben erwähnten halbexperimentellen Methode bestimmt. Die Funktion ist in Abb. 2 in Abhängigkeit von der Temperatur bei Atmosphärendruck aufgezeichnet. Für ein Argonplasma waren wir auf theoretische Werte von Cann [10] angewiesen, die in Abb. 1 dargestellt sind. Gleichzeitig sind in diesen Abbildungen die entsprechenden Wärmestrompotentialfunktionen  $S(T)$  zu sehen, die durch Integration der Wärmeleitfähigkeit über die Temperatur erhalten wurden

$$S(T) = \int_0^T \kappa(T, p) dT. \quad (4. 2. 14)$$

Diese Funktionen erweisen sich bei der Berechnung von Lichtbögen als sehr praktisch (siehe (5) und (7)).

Beim Vergleich der beiden Wärmeleitfähigkeiten fällt sofort auf, daß bei Stickstoff im Gegensatz zu Argon zwei Maximalwerte - bei ungefähr  $7\,000^\circ\text{K}$  und bei  $14\,500^\circ\text{K}$  vorliegen (für Argon bei  $14\,500^\circ\text{K}$ ).

Das ist darauf zurückzuführen, daß Argon als Edelgas bei kleinen Temperaturen in atomarer, Stickstoff dagegen in molekularer Form vorliegt. Der erste Berg in der Wärmeleitfähigkeit von Stickstoff mit seinem Maximum bei ungefähr  $7\,000^\circ\text{K}$  ist also auf den Transport von Dissoziationsenergie zurückzuführen. Die Extremwerte

bei  $14\,500^\circ\text{K}$  werden dann folgerichtig durch den Transport von Ionisationsenergie verursacht. In (5) werden wir sehen, daß dieses differenzierte Verhalten in erster Linie die Unterschiede zwischen Bögen mit Molekül- und atomaren Gasen bewirkt.

#### 4. 3. Die Zähigkeit

Für Strömungsvorgänge in Rohren ist die Zähigkeit eine charakteristische Materialfunktion.

Als erste und einfachste Näherung für diese Größe erhalten wir aus der kinetischen Gastheorie für ein Gasgemisch, das aus n-Komponenten besteht, nach [1] folgenden Ausdruck

$$\mu = \sum_i \frac{1}{3} n_i m_i \bar{v}_i \lambda_i. \quad (4. 3. 1)$$

Die mittlere thermische Geschwindigkeit  $\bar{v}_i$  wird dabei durch folgende bekannte Beziehung gegeben.

$$\bar{v}_i = \left( \frac{8 k T}{\pi m_i} \right)^{1/2}. \quad (4. 3. 2)$$

Für den Kehrwert der mittleren freien Weglänge der i. Teilchensorte gilt folgende Abhängigkeit

$$\frac{1}{\lambda_i} = \sum_k \left( 1 - \frac{1}{2} p_{ik} \right) n_k Q_{ik} \sqrt{1 + \frac{m_k}{m_i}}. \quad (4. 3. 3)$$

Dabei bedeutet  $Q_{ik}$  der Wirkungsquerschnitt der i. gegen die k. Teilchensorte. Der Faktor  $(1 - 1/2 p_{ik})$  berücksichtigt die Persistenz mit

$$p_{ik} = \frac{m_k - 0,2 m_i}{m_k + m_i} \quad (4. 3. 4)$$

Für ein Lorentzgas wurde die Zähigkeit von Braginskii [76] berechnet. Ohne Berücksichtigung eines Magnetfeldeinflusses ergibt sich folgende Formel



$$\mu_L = \frac{0,406 m_2^{1/2} (kT)^{5/2}}{Z^4 e^4 \ln \Lambda} \quad (4.3.5)$$

Dabei wurde vorausgesetzt, daß in erster Linie die Ionen zur Zähigkeit beitragen.

Die allgemeine Formel für die Zähigkeit [10, 25] läßt sich durch Determinanten darstellen. Die Werte dieser Determinanten werden im starken Maße von der Genauigkeit der Stoßparameter bestimmt. Da genaue Meßwerte über diese Parameter nicht vorliegen, werden in [10] zur Berechnung der Zähigkeit eines Argonplasmas nur die Hauptdiagonalelemente der Determinanten berücksichtigt. Eine Abschätzung des Fehlers zeigt, daß die Abweichungen von der Größenordnung  $(m_e/m_i)^{1/4}$  sind, also im Rahmen unserer Genauigkeit zu vernachlässigen sind. Die Zähigkeit ist in Abb. 1 als Funktion der Temperatur bei Atmosphärendruck dargestellt. Das Absinken der Zähigkeit oberhalb von  $10\,000^\circ\text{K}$  ist auf die Tatsache zurückzuführen, daß die Zähigkeit oberhalb dieser Temperatur in immer stärkerem Maße von den Ionen anstatt von den Atomen hervorgerufen wird, deren Beitrag kleiner als der der Atome ist (siehe (4.3.4)). Die Zähigkeit von Stickstoff ist in Abb. 2 als Funktion der Temperatur bei Atmosphärendruck aufgezeichnet. Sie wurde aus der klassischen Formel (4.3.1) berechnet. Die Partialteilchendichten werden von [8] übernommen. Für die Wirkungsquerschnitte werden folgende Werte gewählt

$$Q_{N_2, N_2} = f(T) \text{ nach [2]} \quad Q_{N^+, N^+} = 1,4 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2 \text{ nach [4]} \quad (4.3.6)$$

$$Q_{N_2, N} = 1,03 Q_{N_2, N_2} \text{ nach [34]} \quad Q_{N, e} = 5 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \text{ nach [40]}$$

$$Q_{N_2, N^+} = 1,52 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2 \text{ nach [4, 34]} \quad Q_{N^+, N^+} = Q_{ee} \text{ nach [10]}$$

$$Q_{N_2, e} = 5,34 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \text{ nach [34, 40]} \quad Q_{N^+, e} = \frac{e^4}{(kT)^2} \ln \left( \frac{kT}{e^2 n_2} \right) \text{ nach [10, 37]}$$

$$Q_{N, N} = 0,846 Q_{N_2, N_2} \text{ nach [34]} \quad Q_{ee} = Q_{N^+, N^+} \text{ nach [10]}$$

Der Abfall von  $\mu$  bei rund  $7\,000^\circ\text{K}$  ist entsprechend wie oben durch die Abnahme der Moleküldichte oberhalb dieser Temperatur zu erklären. Oberhalb von  $15\,000^\circ\text{K}$  muß die Zähigkeit auf Grund von Gleichung (4.3.4) natürlich wieder schnell größer werden. Die Zähigkeiten gehen für kleine Temperaturen ( $1\,000^\circ\text{K}$ ) stetig in die klassischen [15] über. Die Zähigkeit von Argon ist wegen der größeren Atommasse rund 2 mal so groß wie die von Stickstoff. Zur halbexperimentellen Bestimmung der Zähigkeit müssen Experimente gewählt werden, wo die Reibungskräfte, wie oben schon erwähnt, wesentlich das sich einstellende Strömungsbild bestimmen. Ein Fall, wo dieser Einfluß gegeben ist, kann nach [1] in einem Hochstromkohlebogen realisiert werden. Das Eigenmagnetfeld des Bogenstromes erzeugt hier im Gebiet des Kathodenbrennfleckes eine axial zur Anode gerichtete stationäre Plasmaströmung hoher Geschwindigkeit, die auf Grund der Reibung mit wachsendem Abstand von der Kathode breiter und kleiner wird. Mit Hilfe von spektroskopischen Messungen konnte das Temperaturfeld dieses Bogens bestimmt werden. Ebenfalls wurden Wege gefunden, das Geschwindigkeitsfeld im Bogen zu messen. Diese Daten und die aus der Sahagleichung (siehe 4.1) als Funktion der Temperatur berechnete Dichte genügen unter gewissen Näherungen, die Zähigkeit als Funktion der Temperatur zu bestimmen. Dazu sind aus dem gemessenen Geschwindigkeitsfeld die Geschwindigkeitsgradienten zu berechnen. Die erhaltenen Werte zeigen den schon diskutierten Verlauf.

Die Nachteile dieser Methode liegen auf der Hand. Einmal müssen mit großem experimentellem Aufwand und durch langwierige Messungen das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld des Bogens bestimmt werden. Zum anderen müssen aus dem gemessenen Geschwindigkeitsfeld durch graphische Differentiation die Geschwindigkeitsgradienten bestimmt werden, wodurch die Genauigkeit der Methode stark reduziert wird. Außerdem treten von der Kathode her unter Umständen Verunreinigungen in das zu untersuchende Gas ein, die nicht mehr vernachlässigbar sind.

Diese Schwierigkeiten können umgangen werden, indem ein wandstabilisierter zylindersymmetrischer Bogen mit Hagen-Poiseuille

Strömung (siehe(6)) als Untersuchungsobjekt herangezogen wird. Dieser Bogentyp kann relativ einfach realisiert werden [18]. Wie wir in(6)sehen werden, hängen in diesem Falle die Temperaturverteilung und die elektrischen Größen in erster Näherung nicht von den dynamischen Größen ab. Außerdem sind diese Größen sehr gut aus dem Verhalten von Bögen ohne Konvektion bekannt (siehe(5)). Wir benötigen also nur eine charakteristische Gleichung zur Bestimmung der Zähigkeit. Wenn die Dichte wieder von der Sahagleichung übernommen werden kann, so bietet sich hierfür die Gleichung für den gesamten Massenfluß an, die sich nach (6. 2) in folgender Form als Funktion des Bogenstromes darstellen läßt

$$Q_m = 2\pi R^2 \int_0^1 w_0(s) g_{m0}(s) s ds. \quad (4.3.7)$$

Durch Einsetzen der Geschwindigkeit nach(6. 2) erhalten wir folgende Integralgleichung 1. Art für die Zähigkeit

$$\frac{Q_m(I)}{\pi R^4 \alpha(I)} = \int_0^1 \frac{s}{\mu(s, I)} \int_0^s g_m(s_0, I) t dt ds. \quad (4.3.8)$$

Zur Lösung dieser Gleichung müssen die Durchflußmenge  $Q_m$  als Funktion des Bogenstromes, der Druckgradient  $\alpha$  in Achsenrichtung [18] und der Radius des Rohres  $R$  bekannt sein. Da die Temperaturverteilung und die Dichte ebenfalls bestimmt sind, kann aus Gleichung (4.3.7) die Zähigkeit als Funktion der Temperatur oder des Wärmestrompotentials eindeutig bestimmt werden. Zur numerischen Berechnung kann eine Methode Verwendung finden, die analog zu dem Verfahren in [70, 85] vorgeht.

## 5. DER WANDSTABILISIERTE ZYLINDERSYMMETRISCHE LICHTBOGEN OHNE KONVEKTION

Nachdem wir nun die Gleichungen einschließlich der Randbedingungen und der Materialfunktionen vorliegen haben, die das allgemeine Verhalten von Lichtbögen unter gewissen Näherungsannahmen beschreiben, wollen wir uns speziellen Geometrien und Bogenformen zuwenden und ihre spezifischen Eigenschaften und physikalischen Gegebenheiten untersuchen. Der theoretisch einfachste Fall liegt beim wandstabilisierten zylindersymmetrischen Lichtbogen ohne Konvektion vor. Am einfachsten läßt sich dieser Bogentyp in dem von Maecker und Mitarbeitern [39] entwickelten Kaskadenbogen realisieren, wobei eine Strömung im Bogen durch eine geeignete Anordnung verhindert werden kann. Dieser Bogentyp läßt bei einfacher Geometrie eine relativ große Variation des Parameterbereiches zu, so daß er als Testobjekt für plasmadiagnostische Methoden von großer Bedeutung ist. Ebenfalls ist er zum Studium von stationären Plasmabedingungen von großer Wichtigkeit.

### 5.1 Die Grundgleichungen und ihre verschiedenen Lösungsmethoden

Der wandstabilisierte zylindersymmetrische Lichtbogen ohne Konvektion zeichnet sich vor anderen Bögen dadurch aus, daß, wie schon der Name sagt, strenge Zylindersymmetrie vorliegt, das heißt alle Größen sind bis auf das elektrische Potential eine Funktion des Radius allein. Außerdem verschwinden alle Geschwindigkeitskomponenten. Für diesen Fall reduzieren sich die Grundgleichungen (siehe(3)) auf folgende Form, wenn wir anstelle von  $r$  eine auf den Rohrradius  $R$  normierte Variable  $s = r/R$  einführen.

$$\text{Zustandsgleichung: } p_0(s) = \frac{\kappa g_{m0}(s) T_0(s)}{m(p_0(s), T_0(s))} \quad (5.1.1)$$

Navier-Stokessche Gl.

$$r\text{-Komponente: } 0 = - \frac{dp_0(s)}{ds} - R \mu_{el}(s) H_{y0}(s) \quad (5.1.2)$$

$$\text{Energiebilanz: } \frac{1}{s} \frac{d}{ds} s \kappa(T_0(s), p_0(s)) \frac{dT_0(s)}{ds} + R^2 \left( \frac{\partial^2 T_0(s)}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 T_0(s)}{\partial \phi^2} \right) - \bar{u}(T_0(s), p_0(s)) = 0 \quad (5.1.3)$$

$$\text{Durchflutungsgesetz: } \frac{1}{g} \frac{d}{ds} g H_{\varphi_0}(s) = R j_{z0}(s) \quad (5.1.4)$$

z-Komponente

$$\text{Induktionsgesetz: } E_z = E_0 = \text{const.} \quad (5.1.5)$$

$\varphi$ -Komponente  $\varphi_0 = -E_0 z$

$$\text{Poissongleichung: } g_{el} = 0 \quad (5.1.6)$$

$$\text{Verallgem. Ohmsches Gesetz: } j_{z0}(s) = E_0 z(T_0(s), p_0(s)) \quad (5.1.7)$$

z-Komponente

Auf Grund der Endlichkeitsbedingung für physikalische Größen (3.7) sind folgende Bedingungen an die Temperatur und an das Eigenmagnetfeld zu stellen.

$$T_0'(0) = H_{\varphi_0}(0) = 0. \quad (5.1.8)$$

Außerdem sind die Werte der Temperatur und des Druckes an der Wand vorzugeben

$$p_0(1) = p_0; T_0(1) = T_W. \quad (5.1.9)$$

Zur eindeutigen Festlegung der Feldstärke  $E_0$  muß die Temperatur in der Achse bekannt sein.

$$T_0(0) = T_A \quad (5.1.10)$$

Natürlich kann auch anstelle von  $T_A$  der Bogenstrom (siehe (5.2.2.5)) vorgegeben sein, da, wie wir noch sehen werden, eine eindeutige Abhängigkeit zwischen diesen Parametern besteht.

Zur Berechnung der Temperaturverteilung und der Charakteristik muß man von der lokalen Energiebilanz (5.1.3) ausgehen, die in diesem speziellen Fall mit Elenbaas-Hellersche Differentialgleichung [16, 17, 24] bezeichnet wird. Mathematisch handelt es sich dabei für die Temperatur um eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter

Ordnung, wenn man annimmt, daß der Druck als eine in erster Näherung konstante Größe (siehe (5.2.3)) nur als Parameter der Materialfunktionen in die Gleichung eingeht. Die Materialfunktionen elektrische Leitfähigkeit, Wärmeleitfähigkeit und spezifische Abstrahlung werden dabei als Funktion der Temperatur als bekannt vorausgesetzt.

Der allgemeinen Lösung des Problems stehen drei Schwierigkeiten entgegen:

1. Die Nichtlinearität der Differentialgleichung
2. Die Bestimmung der elektrischen Feldstärke im Bogen aus den Randbedingungen für die Temperatur.
3. Die ungenaue Kenntnis der benötigten Materialfunktionen.

Um einen nichtlinearen Term in der Differentialgleichung zu eliminieren, führt man meist an Stelle der Temperatur das Wärmestrompotential ein [58].

Nach dieser Einführung kann man, wie es von mehreren Autoren [23, 38, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 84] unternommen wurde, die erste Schwierigkeit dadurch beheben, daß man den nichtlinearen Term der Gleichung durch zwei oder mehr Geraden approximiert.

Man gelangt auf diese Weise zu den verschiedenen Bogenmodellen, wie dem Kanalmodell, dem Parabel-, dem Bessel- oder dem Zweikanalmodell. Aus der Methode, die im folgenden zur Berechnung herangezogen wird, kann man eine allgemeine Modelltheorie entwickeln, wobei jedoch mit wachsender Kompliziertheit [84] der approximierenden Funktion der analytische Ausdruck für die Lösung entsprechend kompliziert wird.

Die Behebung der zweiten Schwierigkeit, nämlich die Bestimmung der elektrischen Feldstärke aus den Randbedingungen, vereinfacht sich ganz erheblich, wenn man Bögen ohne nennenswerte Abstrahlung untersucht. In diesem Falle kann man nämlich durch eine geeignete Transformation die Feldstärke in die unabhängige Variable hineinziehen. Auf diese Weise läßt sich bei verschiedenen Modellen die Feldstärke aus den Randbedingungen und den Kanalradien

bestimmen. Beim Kanalmodell muß neben der Energiebilanz zur Berechnung der Feldstärke eine weitere Bedingung hinzugenommen werden, nämlich das Steenbecksche Minimumprinzip [13], das nach Feters [48, 49] als Prinzip der minimalen Entropieproduktion aber schon in der Energiebilanz enthalten ist. Die Berechnung der Feldstärke wird schwierig, wenn man die abgestrahlte Energie des Bogens nicht mehr gegen die elektrisch zugeführte Energie vernachlässigen kann. In diesem Fall ist man neben einer recht komplizierten Methode [29, 30] auf das Verfahren angewiesen, das weiter unten besprochen wird. Die Schwierigkeit der ungenauen Kenntnis der benötigten Materialfunktionen versuchte man am Anfang dadurch zu lösen [20, 29, 30, 57, 88], daß man für die Wärmeleitfähigkeit einen konstanten oder mit einer Potenz der Temperatur ansteigenden Verlauf und für die anderen Materialfunktionen theoretisch ermittelte Werte annahm. Wie Vergleiche mit dem Experiment zeigten, konnte mit diesen Funktionen nur eine qualitative Beschreibung des Bogenverhaltens erzielt werden. Die nach den neuesten Ergebnissen berechneten Funktionen (siehe(4)) lassen dagegen im Rahmen der Näherung eine quantitative Beschreibung zu.

## 5.2. Das allgemeine Verhalten eines solchen Bogentyps für atomare (z.B. Argon) und molekulare (z.B. Stickstoff) Füllgase

Nachdem wir die Grundgleichungen dargelegt und einen Überblick über analytische Näherungslösungen für die Temperaturverteilung und das elektrische Verhalten gegeben haben, wollen wir im folgenden die allgemeinen Eigenschaften eines solchen Bogens im einzelnen untersuchen. Dazu werden wir zwei verschiedene Füllgase betrachten - Argon und Stickstoff - da das Verhalten des Bogens wesentlich davon bestimmt wird, ob das Gas in atomarer oder molekularer Form bei den zu untersuchenden Temperaturen vorliegt.

### 5.2.1. Die Berechnung der thermischen Eigenschaften.

Das thermische Verhalten des Bogens wird in erster Linie durch die Energiebilanz bestimmt. Indem wir (5.1.7) in (5.1.3) einsetzen, erhält diese Bilanz folgende Form

$$-\frac{1}{3} \frac{d}{ds} g \kappa(T_0, p_0) \frac{d}{ds} T_0(s; R, T_A, T_W) = R^2 (g(T_0, p_0) E_0^2(R, T_A, T_W) - \bar{u}(T_0, p_0)) \quad (5.2.1.1)$$

Hierbei ist sofort angegeben, daß die Temperaturverteilung von den drei Parametern  $R$ ,  $T_A$ ,  $T_W$  abhängt. Da der magnetische Druck in radialer Richtung klein ist (siehe (5.2.3)), kann der Druck im Bogen in erster Näherung als konstant angesetzt werden. Er liefert also lediglich einen weiteren Parameter der Lösung. Außerdem können wir in diesem Fall dem Wärmestrom ein Potential  $S$  gemäß folgender Beziehung zuordnen.

$$\text{grad } S = \kappa(T, p_0) g \text{ grad } T \quad \text{oder} \quad S = \int_0^T \kappa(T, p_0) dT. \quad (5.2.1.2)$$

Da die Wärmeleitfähigkeit positiv ist, ergibt sich eine eindeutige Zuordnung von  $S$  und  $T$ .

Mit dieser neuen Veränderlichen und den neuen Randbedingungen, die aus (5.1.8), (5.1.9) und (5.1.10) folgen  $S(0) = S_A$ ,  $S'(0) = 0$ ,  $S(1) = S_W$  (5.2.13)

nimmt die Energiebilanz (5.2.1.1) folgende Form an

$$-\frac{1}{3} \frac{d}{ds} g \frac{d}{ds} S_0(s; R, S_A, S_W, p_0) = R^2 (g(S_0, p_0) E_0^2(R, S_A, S_W, p_0) - \bar{u}(S_0, p_0)) \quad (5.2.1.4)$$

Zur Auflösung dieser Gleichung und zur Berechnung der Feldstärke formen wir die Differentialgleichung in eine Integralgleichung um. Dazu integrieren wir (5.2.1.4) zweimal von Null bis  $s$  und beachten dabei [59, 67] die beiden ersten Randbedingungen (5.2.1.3). Wir erhalten auf diese Weise

$$S_A - S_0(s) = R^2 \int_0^s \frac{1}{t} \int_0^t [g(S_0(u)) E_0^2 - \bar{u}(S_0(u))] u du dt. \quad (5.2.1.5)$$

Im Gegensatz zu früheren Arbeiten [45, 55] kann dieses Doppelintegral auf eine einfache Integration zurückgeführt werden, indem man die

Integration vertauscht

$$S_A - S_0(\xi) = R^2 \int_0^{\xi} [\tilde{\alpha}(S_0(u)) E_0 - \tilde{u}(S_0(u))] u \ln \frac{u}{\xi} du. \quad (5.2.1.6)$$

Wenn wir jetzt die dritte Randbedingung (5.2.1.3) beachten, können wir die Feldstärke  $E_0$  eliminieren. Man erhält

$$E_0(R, S_A, S_W, p_0) = \frac{1}{R} \left[ \frac{S_A - S_W + R^2 \int_0^{\xi} \tilde{u}(S_0(u); R, S_A, S_W, p_0) u \ln \frac{u}{\xi} du}{\int_0^{\xi} \tilde{\alpha}(S_0(u); R, S_A, S_W, p_0) u \ln \frac{u}{\xi} du} \right]^{1/2} \quad (5.2.1.7)$$

Mit Hilfe dieser Umformung ist es also gelungen, die elektrische Feldstärke explizit aus der Wärmestrompotentialverteilung und den Materialfunktionen in Abhängigkeit von den Parametern zu bestimmen.

Um die Wärmestrompotentialverteilung und daraus die Temperaturverteilung im Bogen zu erhalten, brauchen wir nur den Ausdruck für die Feldstärke (5.2.1.7) in die Integralgleichung (5.2.1.6) einzusetzen:

$$\frac{S_W}{S_A} = 1 - \left( 1 - \frac{S_W}{S_A} + \frac{R^2}{S_A} \int_0^{\xi} u v \ln \frac{u}{\xi} dv \right) \frac{\int_0^{\xi} \tilde{u}(S_0(u)) u \ln \frac{u}{\xi} du}{\int_0^{\xi} \tilde{\alpha}(S_0(u)) u \ln \frac{u}{\xi} du} + \frac{R^2}{S_A} \int_0^{\xi} u u \ln \frac{u}{\xi} du \quad (5.2.1.8)$$

Diese Gleichung stellt eine nichtlineare Integralgleichung dar. Durch Vorgabe der unabhängigen Parameter  $R$ ,  $S_A$ ,  $S_W$  und  $p_0$  ist die Lösung eindeutig festgelegt. Aus der bekannten Abhängigkeit  $S_0(\xi)$  können alle anderen Größen bestimmt werden. Da die benötigten Materialfunktionen meist graphisch gegeben sind, kommen zur Lösung graphische [84] oder numerische Verfahren in Betracht.

Eine Methode, die sich bei der numerischen Rechnung bewährt hat, beruht auf einem Iterationsverfahren, das ganz analog zum Picardschen Verfahren [31] zur Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung durchgeführt wird, nämlich das Verfahren der sukzessiven Approximation. Wir wählen dazu eine beliebige stetige Funktion  $S_0^0(\xi)$  - in unserem Fall erwies sich am geeignetsten

$$S_0^0(\xi) = S_A + \xi^{2K} (S_W - S_A), \quad K \geq 1 \text{ beliebig fest} \quad (5.2.1.9)$$

(für die Potenz von  $\xi$  wurde eine gerade Zahl gewählt, da die Funktion  $S_0(\xi)$ , wie man aus (5.2.1.4) ersehen kann, nur von  $\xi^2$  abhängt) - und berechnen damit die rechte Seite von Gleichung (5.2.1.8). Wir erhalten darauf auf der linken Seite ein  $S_0^1(\xi)$ . Mit dieser Funktion  $S_0^1(\xi)$  wiederholen wir das Verfahren und kommen zu einem  $S_0^2(\xi)$ . Nach  $n$  Schritten dieser Art erhält man schließlich ein  $S_0^n(\xi)$ . Man kann ganz analog zum Beweis des Satzes von F i c a r d zeigen, daß  $S_0^n(\xi)$  eine stetige Funktion darstellt, die die Randbedingungen (5.2.1.3) erfüllt und sehr schnell gleichmäßig gegen die Lösung von (5.2.1.8) konvergiert, wenn die Funktionen  $\tilde{\alpha}(\xi)$  und  $\tilde{u}(\xi)$  stetig sind, im betrachteten Intervall eine Lippschitz-Bedingung erfüllen und überall positiv sind. Diese Bedingungen erfüllen aber die Leitfähigkeit und die spezifische Abstrahlung, so daß die Lösung auf diesem Wege erhalten werden kann.

Die numerischen Rechnungen wurden mit Hilfe des Digitalrechners Siemens 2002 durchgeführt. Das Programm wurde so angelegt, daß man nach Eingabe der Materialfunktionen mit einer Stützstellenzahl von maximal 100 Werten nur noch jeweils die Parameter  $R$ ,  $S_A$  und  $S_W$  einzuführen brauchte. Die Maschine rechnete dann solange, bis der relative Fehler von  $S_0^n(\xi)$ , also  $|S_0^n(\xi) - S_0^{n-1}(\xi)| / S_0^n(\xi)$ , kleiner als eine vorgegebene Fehlerschranke von 0,5 % ausfiel. Daraufhin wurden sämtliche interessierenden Größen berechnet und ausgedruckt. Die Rechnungen für die später dargestellten Parameterwerte zeigten, daß für die oben angegebene Fehlerschranke vier bis sieben Approximationsschritte nötig waren. Dazu war eine Zeit von 5 bis 10 Minuten erforderlich.

Bevor wir nun eine Diskussion der numerischen Ergebnisse vornehmen und einige analytische Abhängigkeiten der Größen von den Parametern ableiten, wollen wir zuerst den Parameterbereich festlegen, in dem diese Untersuchungen stattfinden sollen. Dieser Bereich wird durch die Voraussetzungen eingeschränkt, die wir bei der Ableitung der beschreibenden Gleichungen gemacht haben.

Der Temperatur- und Druckbereich wird durch die Kenntnis der Materialfunktionen eingeschränkt ( $p_0 = 1 \text{ atm}$ ,  $T \leq 15\,000^\circ \text{K}$  für Stickstoff,  $T \leq 20\,000^\circ \text{K}$  für Argon). Als Wandtemperatur wird im allgemeinen  $500^\circ \text{K}$  angenommen. Die obere Grenze wird durch die Bedingung gegeben, daß die Wand bei dieser Temperatur nicht verdampfen und so das Füllgas des Bogens nicht beeinflussen soll. Als maximaler Wert wurden  $3\,000^\circ \text{K}$  gewählt. Der Variationsbereich des Rohrradius wird nach oben durch die Voraussetzung eingeschränkt, daß der Bogen optisch dünn sein soll, während die untere Grenze an die Bedingung geknüpft ist, daß die mittlere freie Weglänge der einzelnen Teilchen und die Debyelänge klein sein müssen gegen den Durchmesser des Entladungsrohres. Außerdem kann die Feldstärke für kleine Radien so groß werden, daß das Ohmsche Gesetz in der Form (5.1.7) und die Voraussetzung des thermischen Gleichgewichts in Frage gestellt werden. Wir wählen für den Radius ein Intervall zwischen 0,5 mm und 2,5 cm.

Nachdem wir nun den Parameterbereich festgelegt haben, wollen wir zuerst die Abhängigkeit der Wärmestrompotential- und der Temperaturverteilung vom Radius des Entladungsrohres untersuchen. Wie aus Gleichung (5.2.1.8) zu ersehen ist, hängt die S- bzw. T-Verteilung nur vom Quadrat des Radius ab. Dies hat zur Folge, daß erst oberhalb eines bestimmten Radius  $R_0$  die Abhängigkeit von R stark ins Gewicht fällt. Unterhalb dieses Radius brennen alle Bögen also in Bezug auf ihre S- bzw. T-Verteilung ähnlich, wenn die Achsen- und Wandtemperatur gleich sind

$$S_0 = S_0(q; S_A, S_W) \text{ für } R \leq R_0(T_A, T_W) \quad (5.2.1.11)$$

Diesen Sachverhalt erkennt man deutlich aus den numerischen Ergebnissen in den Abb. 7, 8, 9, 10.

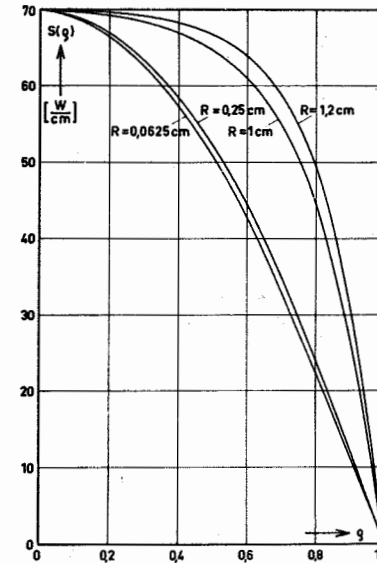


Abb. 7 Die Wärmestrompotentialverteilung im Argonbogen ( $S_A = 70 \text{ W cm}^{-1}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )

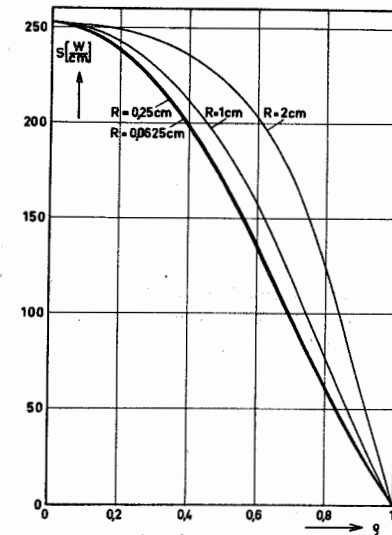


Abb. 8 Die Wärmestrompotentialverteilung im Stickstoffbogen ( $T_A = 13\,000^\circ \text{K}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )



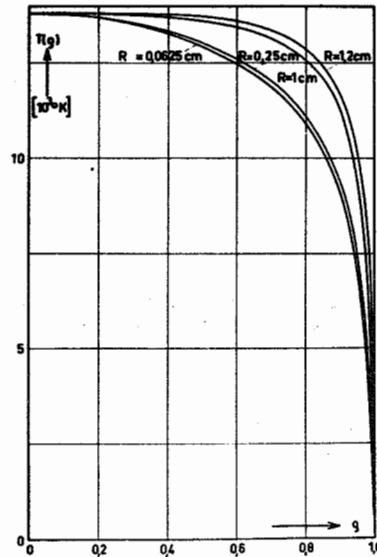


Abb. 9 Die Temperaturverteilung im Argonbogen ( $S_A = 70 \text{ W cm}^{-1}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )

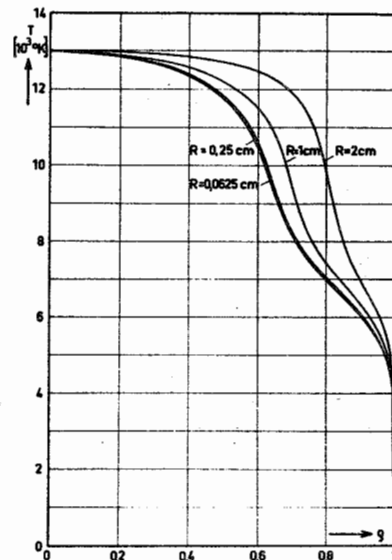


Abb. 10 Die Temperaturverteilung im Stickstoffbogen ( $T_A = 13\,000^\circ \text{K}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )

Hier werden die  $S_0(g)$ -bzw.  $T_0(g)$ -Verteilungen für ein konstantes  $S_A$  und  $S_W$  ( $S_A = 70 \text{ W cm}^{-1}$  bzw.  $T_A = 13\,000^\circ \text{K}$ ,  $S_W = 0,05 \text{ W cm}^{-1}$  bzw.  $T_W = 500^\circ \text{K}$  für Argon;  $S_A = 252 \text{ W cm}^{-1}$  bzw.  $T_A = 13\,000^\circ \text{K}$ ,  $S_W = 0,105 \text{ W cm}^{-1}$  bzw.  $T_W = 500^\circ \text{K}$  für Stickstoff) für verschiedene Radien (Argon  $R = 0,0625 \text{ cm}$ ;  $0,25 \text{ cm}$ ;  $1 \text{ cm}$ ;  $2 \text{ cm}$ ; Stickstoff  $R = 0,0625 \text{ cm}$ ;  $0,25 \text{ cm}$ ;  $1 \text{ cm}$ ;  $2 \text{ cm}$ ) graphisch dargestellt. Das Ähnlichkeitsverhalten ist für Stickstoff bis zu einem größeren Radius ( $R_0 \approx 0,3 \text{ cm}$ ) erfüllt als für Argon ( $R_0 \approx 0,1 \text{ cm}$ ), da die Abstrahlung hier kleiner ist. Für größere Radien bläht sich der Bogen immer weiter auf. Dies ist auf die Tatsache zurückzuführen, daß die Abstrahlung im Gegensatz zum Flächenprozeß des Stromes ein Volumenprozeß darstellt, dessen Einfluß mit wachsendem Radius immer größer wird. Würden wir den Grenzübergang  $R \rightarrow \infty$  durchführen - das liefert natürlich in unserem Fall auf Grund der Voraussetzung nur qualitative Ergebnisse - so sehen wir, indem wir Gleichung (5.2.1.8) durch  $R^2$  dividieren, daß die  $S_0(g)$ - bzw. die  $T_0(g)$ -Verteilung immer mehr gegen die Funktion

$$S_0(g) = S_A \text{ bzw. } T_0(g) = T_A \quad (5.2.1.11)$$

streben. Dabei müssen natürlich die Randbedingungen erhalten bleiben. Im Sinne eines Gleichgewichtszustandes läßt sich dieses Verhalten auch anschaulich leicht erklären. Wie wir aus diesen Überlegungen sehen, können die Temperatur- und die Wärmestrompotentialverteilung in Abhängigkeit von  $R$  nur ein ganz bestimmtes Gebiet der  $(S, g)$ - bzw.  $(T, g)$ -Ebene überstreichen.

Ganz anders verhalten sich die beiden Funktionen im Hinblick auf ihre Abhängigkeit von  $S_A$  und  $T_A$ . In den Abb. 11 und 12 sind die Wärmestrompotential- bzw. in 13 und 14 die Temperaturverteilungen für Argon und Stickstoff ( $R = 0,25 \text{ cm}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ ) für verschiedene Werte von  $S_A$  bzw.  $T_A$  dargestellt. Während die  $S(g)$ -Verteilungen für beide Gase prinzipiell den gleichen Verlauf aufweisen, wird bei den Temperaturverteilungen der wesentliche Unterschied zwischen Bögen mit atomaren und

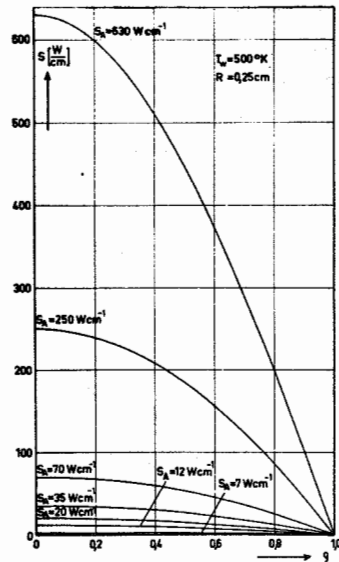


Abb. 11 Die Wärmestrompotentialverteilung im Argonbogen ( $R = 0,25 cm$ ,  $T_w = 500^\circ K$ )

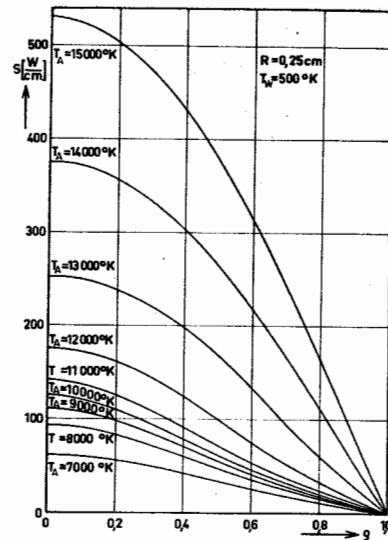


Abb. 12 Die Wärmestrompotentialverteilung im Stickstoffbogen ( $R = 0,25 cm$ ,  $T_w = 500^\circ K$ )

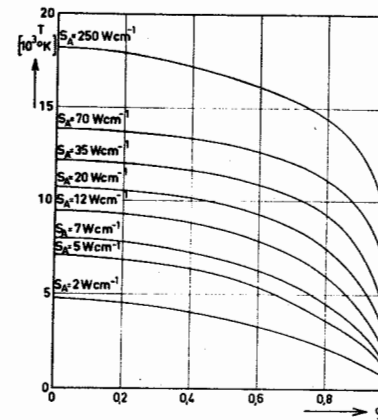
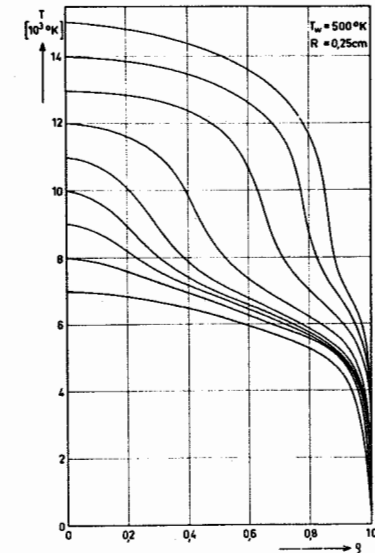


Abb. 13 Die Temperaturverteilung im Argonbogen ( $R = 0,25 cm$ ,  $T_w = 500^\circ K$ )

Abb. 14 Die Temperaturverteilung im Stickstoffbogen ( $R = 0,25 cm$ ,  $T_w = 500^\circ K$ )



Molekülgasen deutlich sichtbar. Bei einer gewissen Größe der Achsentemperatur kommt es bei Molekülgasen zur Ausbildung eines heißen Bogenkerns, während für atomare Gase mehr ein Verhalten wie bei einem erhitzten Metallstab vorliegt, wo die Temperaturverteilung in erster Näherung einen parabelförmigen Verlauf zeigt. Dieser charakteristische Unterschied wird durch die verschiedenen Wärmeleitfähigkeit hervorgerufen (siehe Abb. 1 und 2). Auf Grund des Dissoziationsberges der Wärmeleitfähigkeit von Stickstoff bei 7 000°K ist bei Achsentemperaturen über 7 000°K die Wärmeleitfähigkeit in der Achse geringer als weiter außen, so daß der Kern nicht abgebaut werden kann. Bei höheren Achsentemperaturen wird der heiße Bogenkern wieder breiter und füllt schließlich den ganzen Bogenkanal aus.

Über die analytische Abhängigkeit von  $S_A$  kann man Aussagen machen, wenn die elektrische Leitfähigkeit nach einem Potenzgesetz ansteigt, wie es in (4. 2. 13) angegeben ist und wo Parameter betrachtet werden, bei denen der Abstrahlungsterm vernachlässigt werden kann. (Siehe (5. 2. 1. 8)). In diesem Fall ist die  $S(\xi)$ -Verteilung proportional zu  $S_A$  (siehe (5. 2. 1. 8)).

$$S_0(\xi; S_A, S_W \approx 0, R) = S_0^*(\xi; R) S_A. \quad (5. 2. 1. 12)$$

Für Argon und Stickstoff ist dieses Verhalten innerhalb des Intervalls  $0 < S_A < S_C$  (siehe (4. 2. 13)) zu erwarten, wie es auch die numerischen Rechnungen zeigen.

Um über die Abhängigkeit von der Wandtemperatur Aussagen machen zu können, sehen wir uns am besten die  $S(T)$ -Funktionen in Abb. 1 und 2 und Gleichung (5. 2. 1. 8) an.  $S_W$  geht in diesen Gleichungen im Verhältnis zu  $S_A$  ein. In dem Fall, wo

$$S_W / S_A \ll 1 \quad (5. 2. 1. 13)$$

ist, wird der Einfluß zu vernachlässigen sein. Auf Grund des flachen Verlaufs der  $S(T)$ -Kurve in den Abb. 1 und 2 wird eine Variation der

Wandtemperaturen bis zu Temperaturen von 3 000°K im allgemeinen nur einen geringen Einfluß auf den Temperaturverlauf haben. Nur bei kleinen Achsentemperaturen wird der Einfluß einen merkbaren Effekt haben. Da die Wärmeleitfähigkeit von Stickstoff auf Grund des Dissoziationsbeitrages viel stärker mit der Temperatur ansteigt als die von Argon, wird der Einfluß der Wandtemperatur bei Argonbögen stärker sein als bei Stickstoffbögen. Die geringe Abhängigkeit der den Bogen beschreibenden Größen von  $T_W$  ist natürlich eine Folge der geringen Wärmeleitfähigkeit der Gase für kleine Temperaturen.

Auf eine wichtige Tatsache ist noch hinzuweisen. Bei hohen Achsentemperaturen bilden sich in der Nähe der Wand auf Grund der kleinen Wärmeleitfähigkeit hohe Temperatur- und Teilchendichtengradienten aus (bis zu einigen  $10^6$ °K/cm, siehe Abb. 13 und 14). In diesem Gebiet reichen auf Grund unserer Voraussetzungen die Grundgleichungen zur Beschreibung nicht mehr aus. Man ist also in diesen Gebieten auf höhere Näherungen angewiesen, wenn man die Vorgänge dort beschreiben will. Da dieser Bereich sich aber nur auf die nächste Nähe der Wand bezieht, wollen wir diesen Einfluß vernachlässigen.

## 5. 2. 2. Das elektrische Verhalten und die Größe der Abstrahlung

Nachdem wir das thermische Verhalten untersucht haben, wollen wir uns nun mit den elektrischen und Strahlungseigenschaften des Bogens beschäftigen. Dazu sind zuerst einige integrale Größen anzugeben.

Für den Gesamtstrom durch den Bogen erhalten wir aus dem Ohmschen Gesetz (5. 1. 7) durch Integration über den Bogenquerschnitt den Ausdruck

$$I(R, S_A, S_W, p_0) = 2\pi R^2 E_0(R, S_A, S_W, p_0) \int_0^1 \mathcal{E}(S_0(s), p_0) s ds \quad (5. 2. 2. 1)$$

Daraus ergibt sich für den Leitwert  $G$  bzw. für die dem Bogen pro Längeneinheit zugeführte elektrische Leistung  $P_{el}$

$$G(R, S_A, S_W, p_o) = \frac{I}{E_o} = 2\pi R^2 \int_0^1 G(s_o(s), p_o) s ds \quad (5.2.2.2)$$

$$P_{el}(R, S_A, S_W, p_o) = E_o I = 2\pi R^2 E_o^2(R, S_A, S_W, p_o) \int_0^1 G(s_o(s), p_o) s ds. \quad (5.2.2.3)$$

Für die vom Bogen pro Längeneinheit abgestrahlte Leistung  $P_{rad}$  erhalten wir im Falle des hier betrachteten optisch dünnen Bogens durch Integration über das Bogenvolumen mit der Einheitslänge

$$P_{rad}(R, S_A, S_W, p_o) = 2\pi R^2 \int_0^1 \bar{u}(s_o(s), p_o) s ds. \quad (5.2.2.4)$$

Diese oben angeführten Größen bestimmen zusammen mit der Feldstärke (5.2.1.7) makroskopisch das elektrische und Strahlungsverhalten des besprochenen Bogenstyps.

Bevor wir nun auf die Parameterabhängigkeit eingehen, wollen wir noch kurz skizzieren, wie die Wärmestrompotentialverteilung erhalten werden kann, wenn anstatt dem Achsenwert  $S_A$  der Gesamtstrom  $I$  vorgegeben ist. Dazu setzen wir die aus Gleichung (5.2.2.1) eliminierte Feldstärke  $E_o$  in Gleichung (5.2.1.7) ein. Aus dieser Beziehung kann man explizit  $S_A$  als Funktion vom Strom und den Materialfunktionen angeben. Setzt man diesen Ausdruck in Gleichung (5.2.1.8) ein, so erhält man folgende Integralgleichung, die durch entsprechende Methoden, die in Gleichung (5.2.1.8) angewandt wurden, gelöst werden kann.

$$S(s) = S_W + \frac{I^2}{4\pi R^2} \frac{\int_0^1 \bar{u} \ln \frac{1}{s} d\bar{u} - \ln s \int_0^s \bar{u} d\bar{u}}{(\int_0^1 \bar{u} d\bar{u})^2} - R^2 \left( \int_0^1 \bar{u} \ln \frac{1}{s} d\bar{u} - \ln s \int_0^s \bar{u} d\bar{u} \right). \quad (5.2.2.5)$$

Nach dieser kurzen Zwischenbemerkung wollen wir zur Diskussion der Parameterabhängigkeit übergehen.

Wie wir in (5.2.1) gesehen haben, ist das Wärmestrompotential für kleine Radien, wo der Abstrahlungsterm zu vernachlässigen ist, nicht explizit von  $R$  abhängig (siehe (5.2.1.10)). In diesem Parameterbereich

kann man deshalb bei konstanten Werten von  $S_A$  und  $S_W$  die explizite Abhängigkeit der integralen Bogengrößen und der Feldstärke vom Radius angeben. Man erhält aus den Gleichungen (5.2.1.7), (5.2.2.1), (5.2.2.2), (5.2.2.3) und (5.2.2.4) folgende Ausdrücke

$$E_o(R) = \frac{1}{R} \left[ -\frac{S_A - S_W}{\int_0^1 \bar{u} \ln \frac{1}{s} d\bar{u}} \right]^{1/2} \sim \frac{1}{R} \quad (5.2.2.6)$$

$$I(R) = R \left[ 2\pi \int_0^1 \bar{u} s ds \left( -\frac{S_A - S_W}{\int_0^1 \bar{u} \ln \frac{1}{s} d\bar{u}} \right)^{1/2} \right] \sim R \quad (5.2.2.7)$$

$$G(R) = R^2 \left[ 2\pi \int_0^1 G(s) s ds \right] \sim R^2 \quad (5.2.2.8)$$

$$P_{el}(R) = 2\pi \int_0^1 G(s) s ds \frac{S_A - S_W}{\int_0^1 \bar{u} \ln \frac{1}{s} d\bar{u}} \sim \text{const.} \quad (5.2.2.9)$$

$$P_{rad}(R) = R^2 \left[ 2\pi \int_0^1 \bar{u} s ds \right] \sim R^2. \quad (5.2.2.10)$$

Für die Charakteristik ergibt sich aus Gleichung (5.2.2.6) und (5.2.2.7) durch Elimination von  $R$

$$E_o(R) \sim I^{-1/2}(R) \quad (5.2.2.11)$$

Dieses angegebene Verhalten der einzelnen Größen erkennt man ebenfalls aus den numerisch berechneten Größen in den Abb. 15, 16, 17 und 18. Aus den Charakteristiken (Abb. 15 und 16) kann man ebenfalls  $P_{el}$  als Funktion vom Leitwert ablesen, wenn man auf ein um  $45^\circ$  gedrehtes und um  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  zusammengestauchtes Koordinatensystem übergeht, wie es in diesen Abbildungen eingezeichnet ist [38].

Wie wir sehen, wächst der Strom für kleine  $R$  ( $R \leq R_o$ ) proportional zu  $R$ , während die Feldstärke umgekehrt proportional zu  $R$  abnimmt. Die beiden Größen ändern sich also so, daß die pro Längeneinheit geführte elektrische Leistung in erster Näherung konstant bleibt. Die an die Wand abgeführte Wärmeenergie pro Einheitslänge

$$Q_W = -2\pi R \left. \frac{dS_o}{ds} \right|_{s=R} = -2\pi \left. \frac{dS_o(s)}{ds} \right|_{s=1} \quad (5.2.2.12)$$

bleibt ebenfalls konstant, während die abgestrahlte Leistung mit dem Quadrat des Radius von sehr kleinen Werten aus zunimmt.

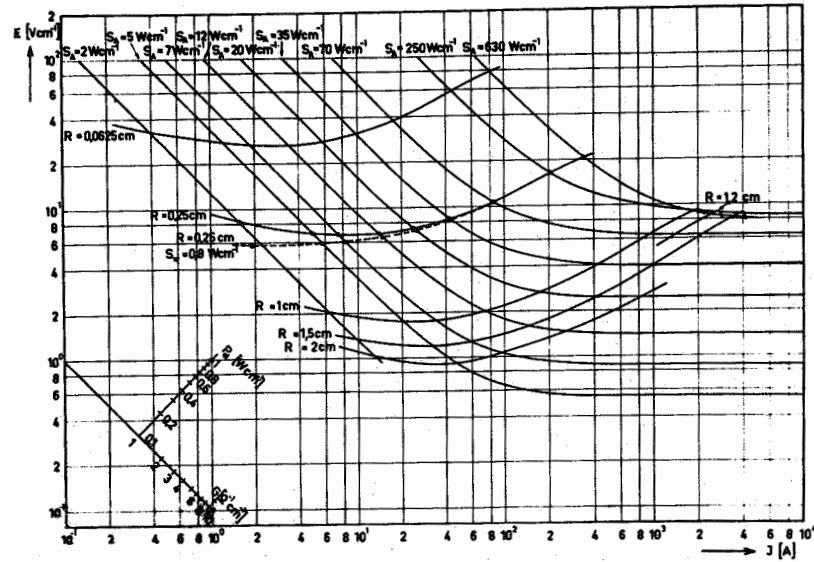


Abb. 15 Die Charakteristik eines Argonbogens bei Atmosphärendruck

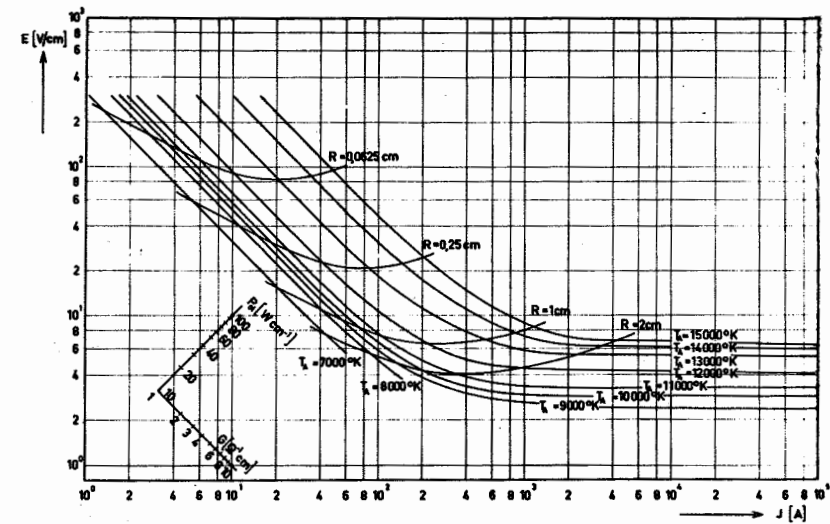


Abb. 16 Die Charakteristik eines Stickstoffbogens bei Atmosphärendruck

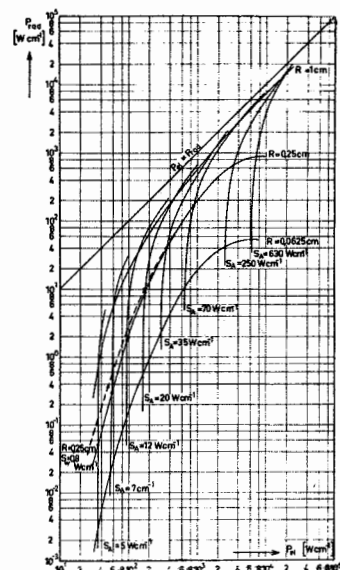


Abb. 17 Die Gesamtabstrahlung als Funktion der elektrisch zugeführten Leistung eines Argonbogens

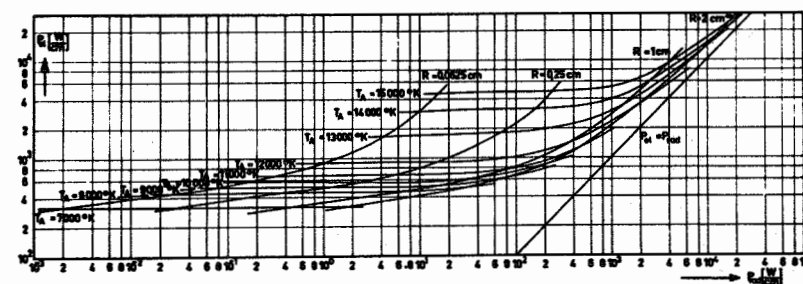


Abb. 18 Die Gesamtabstrahlung als Funktion der elektrisch zugeführten Leistung eines Stickstoffbogens

Anders wird das Verhalten, wenn wir große Radien betrachten  $R \gg R_0$ . Da die  $S_0(s)$ -Verteilung dabei immer mehr gegen  $S_0(s) = S_A$  strebt (siehe (5.2.1.11)), können wir auch in diesem Fall die Abhängigkeit der einzelnen Größen vom Radius des Entladungsröhres angeben.

Wir erhalten

$$E_0(R) \approx \sqrt{\bar{u}(s_A) \bar{g}(s_A)} = \text{const.} \quad (5.2.2.13)$$

$$I(R) \approx \pi \sqrt{\bar{u}(s_A) \bar{g}(s_A)} R^2 \quad (5.2.2.14)$$

$$G(R) \approx \pi \bar{g}(s_A) R^2 \quad (5.2.2.13)$$

$$P_{el,0}(R) \approx \pi \bar{u}(s_A) R^2 \quad (5.2.2.16)$$

$$P_{rad,0}(R) \approx \pi \bar{u}(s_A) R^2 \quad (5.2.2.17)$$

Die an die Wand abgeführte Wärmemenge nimmt dabei mit wachsendem Radius im allgemeinen zu.

Wie wir in (5.2.1) betont haben, sind diese Ergebnisse natürlich nur qualitativer Natur, da sehr große Radien den angegebenen Voraussetzungen widersprechen.

Die Abhängigkeit der Charakteristik von  $S_A$  bzw.  $T_A$  bei konstantem Radius und konstanter Wandtemperatur ist analytisch schwieriger zu fassen. Sie läßt sich angeben, wenn die Bedingung (4.2.13) erfüllt und der Abstrahlungsterm klein ist. In diesem Fall ergibt sich mit der Beziehung (5.2.1.12) folgende Abhängigkeit der Größen von  $S_A$

$$E_0(s_A) \sim S_A^{\frac{1-n}{2}} \quad (5.2.2.18)$$

$$I(s_A) \sim S_A^{\frac{1+n}{2}} \quad (5.2.2.19)$$

$$G(s_A) \sim S_A^n \quad (5.2.2.20)$$

$$P_{el,0}(s_A) \sim S_A \quad (5.2.2.21)$$

Für die Charakteristik ergibt sich aus (5.2.2.18) und (5.2.2.19) durch Elimination von  $S_A$

$$E_0(s_A) \sim I(s_A)^{\frac{1-n}{1+n}} \quad (5.2.2.22)$$

Diese Form der Charakteristik hat sich bisher als empirischen Ansatz [13] bewährt. Er findet auf diese Weise seine theoretische Deutung. Setzen wir die Werte von Argon bzw. Stickstoff (siehe (4.2.13)) ein, so ergibt sich die Darstellung

$$E_0 \sim I^{-0,269} \text{ bzw. } E_0 \sim I^{-0,444} \quad (5.2.2.23)$$

die auch numerisch für kleine Achsentemperaturen erhalten wird.

Wie wir sehen, ist die Charakteristik am Anfang immer fallend, wenn  $\bar{g}$  mit einer Potenz von  $S$  größer als eins anwächst. Dabei kann der Exponent von  $I$  in Gleichung (5.2.2.22) nur zwischen null und minus eins liegen.

Für große  $S$ -Werte steigt die elektrische Leitfähigkeit sowohl von Argon als auch von Stickstoff mit einer Potenz von  $n = 3/7$  an (siehe (4.2)). Dies hat zur Folge, daß die Charakteristik von beiden Gasen für große  $S$  sich in erster Näherung in der Form

$$E_0 \sim I^{2/5} \quad (5.2.2.24)$$

darstellt. Zu vermuten ist, daß dieser Effekt sich dadurch einstellt, daß bei den obigen Temperaturen die Gase in vollständig ionisierter Form vorliegen, d.h. praktisch alle Neutralteilchen sind einmal ionisiert worden. Wir können also erwarten, daß wir die Gase bei diesen Temperaturen in erster Näherung als Lorentzgas behandeln können. In der Tat liefern die Gleichungen (4.2.4), (4.2.10) und (4.2.14), daß bei einem Lorentzgas die elektrische Leitfähigkeit, genau wie es dem experimentellen Befund entspricht, mit einer Potenz  $n = 3/7$  des Wärmestrompotentials ansteigt.

Ein interessanter Effekt tritt bei Argon für große Achsentemperaturen und große Radien auf. Das Absinken der spezifischen Abstrahlung (siehe Abb. 4) für  $S$ -Werte oberhalb von  $S = 300 \text{ W cm}^{-1}$  bewirkt ein Kleinerwerden der Feldstärke. Dies liefert also wieder einen fallenden Teil der Charakteristik. Diese Tatsache ist bisher unseres Wissens nach noch nicht beobachtet worden. Für Stickstoff, wo die Abstrahlung ebenfalls ein Maximum besitzt, müßte bei höheren

Temperaturen und größeren Radien ein entsprechender Effekt auftreten.

Aus den Gleichungen (5.2.2.20) und (5.2.2.21) erhalten wir durch Elimination von  $S_A$  eine Beziehung zwischen dem Leitwert und  $F_{el0}$

$$G(S_A) \sim P_{el}^n(S_A) \quad (5.2.2.25)$$

Wenn wir den Leitwert mit der Leitfähigkeit und das Wärmestrompotential mit der pro Längeneinheit zugeführten elektrischen Leistung identifizieren, zeigen die beiden Funktionen unter den obigen Annahmen die gleiche Abhängigkeit. In einer Näherung ergab sich dieser Sachverhalt schon aus dem Besselmodell [39].

Über die Abhängigkeit der Charakteristik von der Wandtemperatur gilt das schon in (5.2.1) Gesagte. Bei Argon und kleinen Achsentemperaturen ist der Einfluß größer als bei Stickstoff und hohen Achsentemperaturen, wie es auch die numerischen Ergebnisse zeigen (siehe Abb. 15 und 17).

### 5.2.3. Das Eigenmagnetfeld und die Pinchwirkung

In den vorliegenden Abschnitten haben wir vorausgesetzt, daß der Druck im Bogen in erster Näherung konstant ist. Dabei wurde die durch das Eigenmagnetfeld auf Grund der magnetischen Kompression erzeugte Druckerhöhung ( $\gamma$ -Finch) in der Achse vernachlässigt.

Um diesen Einfluß abzuschätzen, wollen wir zuerst einmal die Eigenschaften des Eigenmagnetfeldes betrachten. Durch Integration des Durchflutungsgesetzes (5.1.4) unter Beachtung von (5.1.7) und der Endlichkeitsbedingung (5.1.8) erhalten wir für das Eigenmagnetfeld im Bogen folgende Beziehung

$$H_{y0}(s) = \begin{cases} \frac{RE_0}{S} \int_0^s G(S_0(u)) u du & 0 \leq s \leq 1 \\ \frac{I}{2\pi R} \cdot \frac{1}{s} & 1 \leq s \leq \infty \end{cases} \quad (5.2.3.1)$$

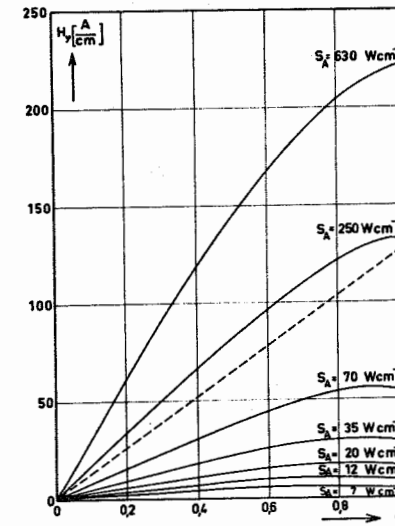


Abb. 19 Die Verteilung der magnetischen Feldstärke im Argonbogen ( $R = 0,25$  cm,  $T_W = 500^\circ$  K)

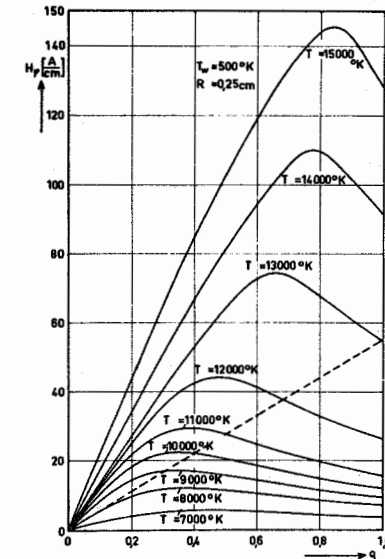


Abb. 20 Die Verteilung der magnetischen Feldstärke im Stickstoffbogen ( $R = 0,25$  cm,  $T_W = 500^\circ$  K)



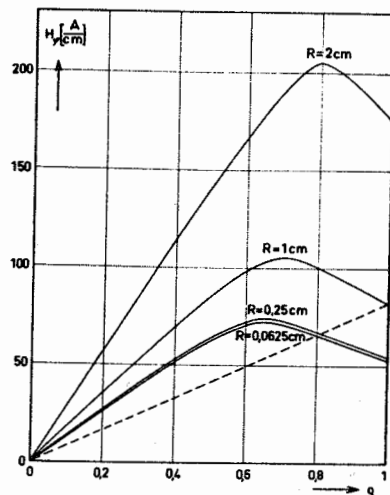


Abb. 21 Die Verteilung der magnetischen Feldstärke im Stickstoffbogen ( $T_A = 13\,000^\circ\text{K}$ ,  $T_W = 500^\circ\text{K}$ )

Die aus dieser Formel berechneten Werte des Magnetfeldes sind für Argon in Abb. 19 und für Stickstoff in Abb. 20 für verschiedene Achsentemperaturen aufgezeichnet. In Abb. 21 wird das Magnetfeld von Stickstoff bei verschiedenen Radien betrachtet. Wie zu erwarten, nimmt das Magnetfeld höhere Werte an als bei einem Draht mit konstanter elektrischer Leitfähigkeit. Diese Überhöhung ist bei Stickstoffbögen am größten (Faktor 2). Sie ist darauf zurückzuführen, daß sich der Strom im wesentlichen auf achsennahe Bereiche beschränkt. Dadurch wird auch das Maximum des Magnetfeldes schon im Bogeninnern angenommen.

Auf Grund der Kernbildung ist dieser Effekt beim Stickstoffbogen stärker ausgeprägt als beim Argonbogen, der bezüglich des Magnetfeldes nicht allzusehr vom Verhalten eines stromdurchflossenen

Drahtes abweicht. Aus der Lage des Maximums läßt sich auch einfach ein effektiver Kerndurchmesser des Lichtbogens angeben (siehe auch [9]).

Bei Kenntnis des Eigenmagnetfeldes sind wir in der Lage, die durch die Lorentzkräfte bewirkte Druckerhöhung in der Achse zu bestimmen. Durch Integration von Gleichung (5.1.2) erhalten wir unter Beachtung der Randbedingung (5.1.4) folgendes Ergebnis

$$p_0(s) - p_0 = \bar{p}_0(s) = \mu_{el} R^2 E_0^2 \int_0^1 \frac{g(s_0(t))}{t} \int_0^t g(s_0(u)) u du dt. \quad (5.2.3.2)$$

Diese Druckerhöhungen sind in den Abb. 22 und 23 für Argon und Stickstoff für verschiedene Achsentemperaturen dargestellt. Abb. 24 zeigt diese Größe für verschiedene Radien für Stickstoff. Wie zu erwarten, steigt die Druckerhöhung mit wachsender Achsentemperatur und steigendem Radius an. Maximal erreicht sie aber in dem betrachteten Parameterbereich nur einige Promille des Druckes  $p_0$  (1 atm). Wir können diesen Einfluß also vernachlässigen. Der Druck

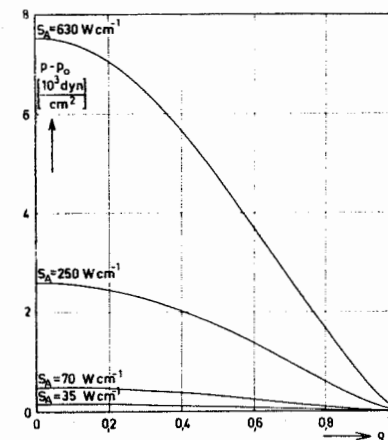


Abb. 22 Die Druckerhöhung in der Säule eines Argonbogens ( $R = 0,25\text{ cm}$ ,  $T_W = 500^\circ\text{K}$ )

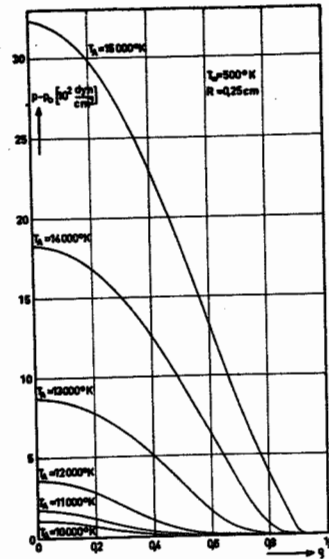
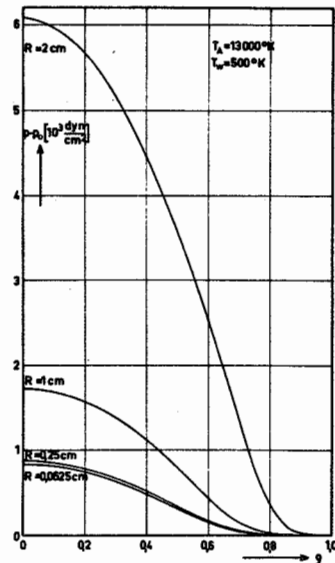


Abb. 23 Die Druckerhöhung in der Säule eines Stickstoffbogens ( $R = 0,25 \text{ cm}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )

Abb. 24 Die Druckerhöhung in der Säule eines Stickstoffbogens ( $T_A = 13\,000^\circ \text{K}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )



in den betrachteten Lichtbögen ist also praktisch gleich dem Außen-  
druck.

Mit dieser Näherung erhalten wir schließlich die Dichte -  
verteilung im Bogen aus der Zustandsgleichung (5. 1. 1) zu

$$\rho_m(s) = \frac{p_0 m(p_0, T_0(s))}{k T_0(s)} \quad (5. 2. 3. 3)$$

Die Dichte nimmt also im wesentlichen umgekehrt proportional zur  
Temperatur im Bogen ab. In der Nähe der Wand ergibt sich aus  
diesem Grunde ein sehr starker Dichteanstieg. Jedoch gilt auch  
hier wieder, was in (5. 2. 1) gesagt wurde.

## 6. DER WANDSTABILISIERTE ZYLINDERSYMMETRISCHE LICHT- BOGEN MIT HAGEN- POISEUILLE STRÖMUNG

Nachdem wir die thermischen und elektrischen Eigenschaften  
eines wandstabilisierten zylindersymmetrischen Lichtbogens ohne  
Konvektion untersucht haben, wollen wir nun in diesem Bogen eine  
Geschwindigkeit in Achsenrichtung zulassen. Wir setzen dabei voraus,  
daß sich eine Unterschallströmung ausbildet, die in unseren Parameter-  
bereichen laminar ist. Diese Voraussetzung ist bei quasiisothermen,  
gasdynamischen Strömungen mit der Größe der kritischen Reynoldzahl  
verknüpft. Wie die entsprechenden Bedingungen für ein Plasma heißen  
müssen, oder ob überhaupt im allgemeinen Fall laminare Strömungen  
im Plasma existieren können, muß einer eingehenden, theoretischen  
Untersuchung vorbehalten werden. Dazu müssen geeignete Experimente  
unternommen und zuverlässige Meßmethoden gefunden werden, die  
im Augenblick noch nicht vorliegen. Wir werden eine laminare Strö-  
mung annehmen und im Rahmen dieses Kapitels einige experimentelle  
Tatsachen angeben, die diese Voraussetzung stützen.

### 6.1. Die Grundgleichungen und ihre Lösung

Da wir voraussetzen, daß der Bogen von zylindersymmetrischer Form ist, dürfen alle Größen nur von einer Koordinate in Radiusrichtung abhängen. Ausnahmen von dieser Voraussetzung müssen aber beim Druck und beim elektrischen Potential zugelassen werden. Damit sich eine Strömung in Achsenrichtung ausbilden kann, muß ein konstanter Druckgradient  $a$  entgegen der Achsenrichtung angenommen werden. Ebenfalls muß das elektrische Potential in Achsenrichtung sich ändern, damit ein elektrischer Strom fließen kann. Alle Ströme in radialer Richtung müssen verschwinden. Mit diesen Voraussetzungen nehmen die Grundgleichungen folgende Form an. Dabei wurde die Koordinate in Achsenrichtung auf den Radius normiert  $\xi = z/R$ .

$$P(\xi, \eta) = -\alpha R \xi + p_0 + \bar{p}_0(\eta) \quad (6.1.1)$$

$$\text{Zustandsgleichung} \quad p = \frac{\kappa g m T}{m(p, T)} \quad (6.1.2)$$

$$\text{Massenerhaltung} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} g m w = 0 \quad (6.1.3)$$

$$\text{Navier-Stokessche Gl.} \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial \xi} - R \mu_{el} \frac{\partial}{\partial \xi} H_y \quad (6.1.4)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\mu}{R} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad (6.1.5)$$

$$\text{Durchflutungsgesetz} \quad \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \xi} g H_y = R \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \mu \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right) \quad (6.1.6)$$

$$\text{Induktionsgesetz} \quad \frac{\partial E_z}{\partial \xi} = 0 \quad \varphi = -E_0 R \xi + \bar{\varphi}(\eta) \quad (6.1.7)$$

$$\text{Poissonsgleichung} \quad \nabla_{el}^2 = \frac{\epsilon_0}{R} \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \xi} g E_r \quad (6.1.8)$$

$$\text{Ohmsches Gesetz} \quad 0 = E_v - \mu_{el} w H_y \quad \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \xi} g E_0 = 0 \quad (6.1.9)$$

Neben den Randbedingungen, die im letzten Kapitel angegeben wurden, muß die radiale Feldstärke hier aus Endlichkeitsgründen in der Achse verschwinden, ebenso die Ableitung der Geschwindigkeit in radialer Richtung

$$E_v(0) = w'(0) = 0 \quad (6.1.10)$$

Da die Bogenwand ruht, muß die Flüssigkeit auf Grund der Reibungskräfte dort ebenfalls in Ruhe sein.

$$w(\eta) = 0 \quad (6.1.11)$$

Wie wir aus diesen Bedingungen und Grundgleichungen sehen, ist eine exakte zylindersymmetrische Lösung dieses Problems, wegen der Kompressibilität des Gases und des Druckgradienten in Achsenrichtung nicht ohne Näherungsannahmen möglich. Um den Einfluß der Kompressibilität herabzusetzen, müssen wir annehmen, daß der Druckabfall über die betrachtete Rohrlänge  $L$  klein ist gegen den mittleren Druck, wie es bei den meisten untersuchten Anordnungen der Fall ist, d. h.

$$\alpha L / p_0 \ll 1 \quad (6.1.12)$$

Unter diesen Bedingungen brauchen wir die  $\xi$ -Abhängigkeit vom Druck in der Zustandsgleichung nicht zu beachten. Konsequenter Weise können wir dann auch voraussetzen, daß die Materialfunktionen in Achsenrichtung konstant sind. In diesem Fall reduziert sich die Energiebilanz bis auf das Reibungsglied  $\mu (\partial w / \partial \xi)^2$  auf die Form, die auch für den Bogen ohne Strömung gültig ist (siehe (5.1.3)). Um den Einfluß der durch Reibung in Wärme umgewandelten kinetischen Energie des Gases auf die Temperaturverteilung und die konstante Feldstärke in Achsenrichtung zu untersuchen, können wir die gleiche Methode wie in (5.2.1) anwenden. Dabei wird wieder wegen ihrer Kleinheit (siehe (5.2.3)) die Druckerhöhung in der Bogenachse durch den magnetischen Druck vernachlässigt. Zu der Integralgleichung (5.2.1.8) bzw. zum Ausdruck für die Feldstärke (5.2.1.7) kommen dann noch einige Terme hinzu. Wir erhalten

$$S_0(\eta)/S_A = 1 - \left( 1 - \frac{S_w}{S_A} + \int_0^1 \left[ \frac{R^2}{S_A} \bar{u}(S(\omega)) - \frac{R^2}{4 S_A} \frac{u^2}{\mu(S(\omega))} \right] \nu \ln \frac{1}{\xi} d\nu \right) \frac{\int_0^1 \bar{u}(S(\omega)) \nu \ln \frac{1}{\xi} d\nu}{\int_0^1 \bar{u}(S(\omega)) \nu \ln \frac{1}{\xi} d\nu} \quad (6.1.13)$$

$$+ \int_0^1 \left[ \frac{R^2}{S_A} \bar{u}(S(\omega)) - \frac{R^2}{4 S_A} \frac{u^2}{\mu(S(\omega))} \right] \nu \ln \frac{1}{\xi} d\nu \quad \text{und} \quad (6.1.14)$$

$$E_0 = \frac{1}{R} \left[ \frac{S_A - S_w + R^2 \int_0^1 \left( \bar{u}(S(\omega)) - \frac{R^2}{4} \frac{u^2}{\mu(S(\omega))} \right) \nu \ln \frac{1}{\xi} d\nu}{\int_0^1 \bar{u}(S(\omega)) \nu \ln \frac{1}{\xi} d\nu} \right]^{1/2}$$

Der Einfluß der Zusatzterme wird klein sein, wenn folgende Ungleichung erfüllt ist

$$\frac{a^2 R^4}{4 S_A} \int_0^1 \frac{v^2 \ln v}{\mu(s(v))} dv \ll 1. \quad (6.1.15)$$

Neben dieser Ungleichung soll noch die Forderung erfüllt sein, daß die Geschwindigkeit sehr viel kleiner als die Schallgeschwindigkeit ist. Diese Bedingung liefert nach (6.2), wenn wir eine konstante Zähigkeit ansetzen

$$W_{0 \max} = \frac{a R^2}{4 \mu_0} \ll c_{\text{schall}}. \quad (6.1.16)$$

Berücksichtigen wir diese Bedingung in (6.1.15), so ergibt sich

$$W_{0 \max}^2 \mu_0 / S_A \ll 1. \quad (6.1.17)$$

Setzen wir hier für Argon und Stickstoff einige Extremwerte unseres Parameterbereiches ein (Argon:  $W_{0 \max} = 10^{-1} c_{\text{schall}} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ cm sec}^{-1}$  [82],  $\mu_0 \leq 3 \cdot 10^{-3} \text{ gr cm}^{-1} \text{ sec}^{-1}$ ,  $S_A \geq 2 \text{ W cm}^{-1}$ ;  $W_{0 \max}^2 \mu_0 S_A^{-1} = 6 \cdot 10^{-2} \ll 1$ ;

Stickstoff:  $W_{0 \max} = 10^{-1} c_{\text{schall}} \approx 1 \cdot 10^4 \text{ cm sec}^{-1}$  [50],  $\mu_0 \leq 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ gr cm}^{-1} \text{ sec}^{-1}$ ,  $S_A \geq 50 \text{ W cm}^{-1}$ ,  $W_{0 \max}^2 \mu_0 S_A^{-1} = 4 \cdot 10^{-3} \ll 1$ ; siehe auch [21]), so sehen wir, daß wir den Einfluß dieser Terme auf die Temperaturverteilung und die bestimmenden elektrischen Eigenschaften des Bogens unter den obigen Bedingungen vernachlässigen können. Der Bogen verhält sich also in dieser Beziehung wie ein entsprechender Bogen ohne Konvektion. Damit entsprechen auch die radiale Druckverteilung, die Dichte im Bogen und das Magnetfeld dem schon behandelten Fall. Anders verhält es sich mit einigen anderen Größen, die im folgenden Abschnitt besprochen werden.

## 6.2. Die Geschwindigkeitsverteilung und abgeleitete Größen

Wie wir im letzten Abschnitt sahen, hat die Strömung praktisch keinen Einfluß auf die Temperaturverteilung und das elektrische Verhalten des Bogens. Damit ist ein zusätzlich eingeführter Parameter - nämlich der Druckgradient - nur für die von der Geschwindigkeit abgeleiteten Größen von Interesse. Die Abhängigkeit der Größen von den anderen Parametern kann aus (5.2) übernommen werden.

Für die Geschwindigkeitsverteilung ergibt sich durch zweimalige Integration der Gleichung (5.1.6) unter Beachtung der beiden Randbedingungen (6.1.10) und (6.1.11) die Gleichung

$$W_0(s) = \frac{a R^2}{2} \int_0^1 \frac{v}{\mu(s(v))} dv. \quad (6.2.1)$$

Daraus können mit Hilfe der S-Verteilung und der Dichte der Massendurchfluß und eine mittlere Geschwindigkeit berechnet werden

$$Q_m = 2 \pi R^2 \int_0^1 W_0(s) g m_0(s) g ds \quad (6.2.2)$$

$$W_m = \frac{\int_0^1 g m_0(s) W_0(s) g ds}{\int_0^1 g m_0(s) g ds} = \frac{Q_m}{2 \pi R^2} \frac{1}{\int_0^1 g m_0(s) g ds} \quad (6.2.3)$$

Ebenfalls ist in diesem Zusammenhang der gesamte Enthalpiefuß und die mittlere Enthalpie der Strömung von Interesse. Wir erhalten entsprechend wie oben folgende Beziehungen

$$Q_h = 2 \pi R^2 \int_0^1 h_0(s) W_0(s) g m_0(s) g ds \quad (6.2.4)$$

$$h_m = \frac{Q_h}{Q_m} = \frac{\int_0^1 h_0(s) g m_0(s) W_0(s) g ds}{\int_0^1 W_0(s) g m_0(s) g ds} \quad (6.2.5)$$

Bei konstanter Zähigkeit erhalten wir für die Geschwindigkeit das Parabelprofil der isothermen Hagen-Poiseuille Strömung. Da in unserem Falle die Zähigkeit sich sehr stark mit der Temperatur ändert (siehe (4.3)), wird das Geschwindigkeitsprofil entsprechend modifiziert. In den Abb. 25 und 26 sind die Geschwindigkeitsprofile für Argon und Stickstoff in Abhängigkeit von der Achsentemperatur aufgezeichnet. Da das Maximum der Zähigkeit von Argon bei höheren Temperaturen liegt als bei Stickstoff, nimmt die Geschwindigkeit mit

wachsender Achsentemperatur zuerst bei beiden Gasen ab, wobei der Einfluß bei Argon bedeutend stärker ist. Mit steigenden Achsentemperaturen bildet sich in der Mitte in immer stärkerem Maße ein zusätzlicher Geschwindigkeitsberg aus, der mit der Kernbildung der Temperatur im Stickstoffbogen zu vergleichen ist. Die Geschwindigkeit nimmt also von der Mitte des Bogens ab sehr stark zu. Dieser Effekt ist durch die starke Abnahme der Zähigkeit oberhalb des Extremwertes zu erklären. Nachher muß natürlich der Geschwindigkeitsberg wieder abgebaut werden, da die Zähigkeit wieder größer wird (siehe (4.3)).

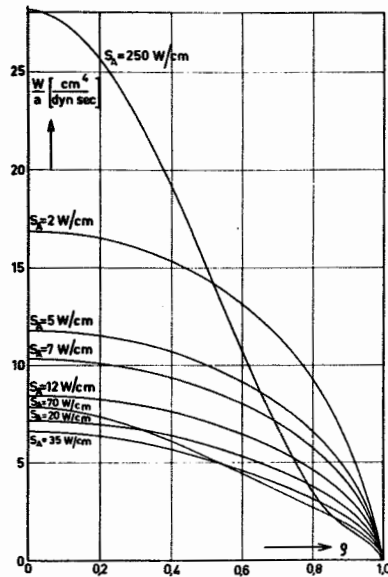


Abb. 25 Die Geschwindigkeitsverteilung im Argonbogen  
( $R = 0,25 \text{ cm}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )

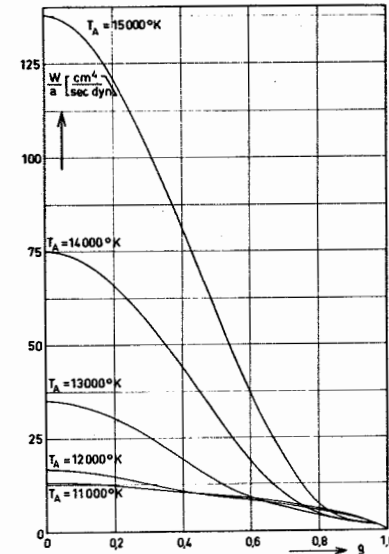
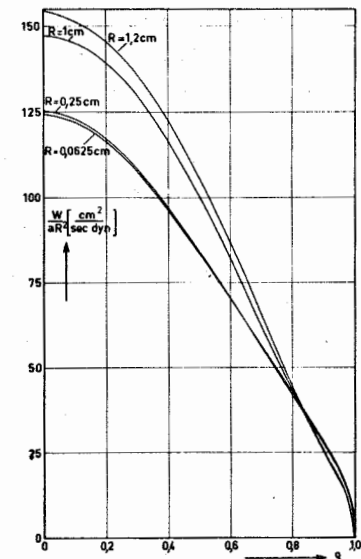


Abb. 26 Die Geschwindigkeitsverteilung im Stickstoffbogen  
( $R = 0,25 \text{ cm}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )

Abb. 27 Die Geschwindigkeitsverteilung im Argonbogen  
( $S_A = 70 \text{ W cm}^{-1}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )



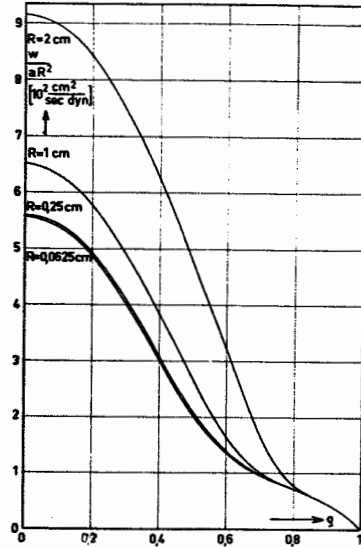


Abb. 28 Die Geschwindigkeitsverteilung im Stickstoffbogen ( $T_A = 13\,000^\circ\text{K}$ ,  $T_W = 500^\circ\text{K}$ )

Für kleine Radien wächst das Geschwindigkeitsprofil proportional zum Quadrat des Radius, da hier die S-Verteilung sich ähnlich bleibt, während für große Radien die Geschwindigkeit stärker oder schwächer anwächst, je nach dem die Achsentemperatur oberhalb oder unterhalb der Temperatur des Zähigkeitsmaximums liegt. Dieses Verhalten ist aus den Abb. 27 und 28 zu ersehen.

In den Abb. 29 und 30 ist die mittlere Geschwindigkeit über dem mittleren Massendurchfluß aufgezeichnet. Wenn man die Größen entsprechend aufträgt, so liegen praktisch alle Punkte für verschiedene Radien und Achsentemperaturen auf einer Kurve. Ändert man die Wandtemperatur, so verschiebt sich die Kurve nur etwas nach links und nach oben. Der Charakter der Kurve wird nicht geändert.

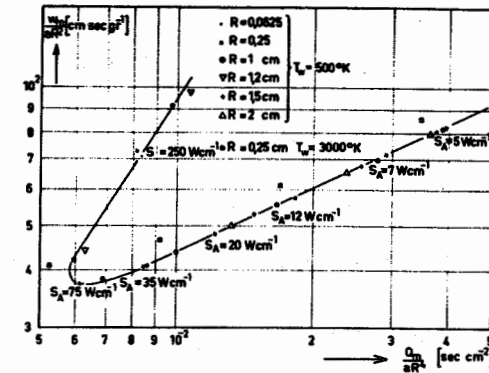


Abb. 29 Die mittlere Geschwindigkeit als Funktion des gesamten Massendurchflusses im Argonbogen

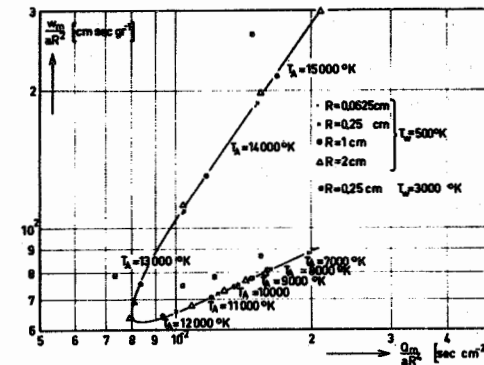


Abb. 30 Die mittlere Geschwindigkeit als Funktion des gesamten Massendurchflusses im Stickstoffbogen

Bei der Variation der Achsentemperaturen können wir bei beiden Kurven zwei Bereiche unterscheiden, die im doppelt logarithmischen Schaubild durch je eine Gerade mit verschiedenen Steigungen charakterisiert werden.

Argon:  $\frac{W_m}{a R^2} / \text{cm sec g}^{-1} = 4,38 \left( \frac{Q_m}{a R^4} / 10^{-2} \text{ sec cm}^2 \right)^{0,46}$ ,  $S_A \leq 70 \text{ W cm}^{-1}$ ,  $R \leq 1,5 \text{ cm}$

$\frac{W_m}{a R^2} / \text{cm sec g}^{-1} = 9,4 \left( \frac{Q_m}{a R^4} / 10^{-2} \text{ sec cm}^2 \right)^{1,52}$ ,  $S_A \geq 70 \text{ W cm}^{-1}$ ,  $R \leq 1,5 \text{ cm}$

$\frac{W_m}{a R^2} / \text{cm sec g}^{-1} = 65 \left( \frac{Q_m}{a R^4} / 10^{-2} \text{ sec cm}^2 \right)^{0,39}$ ,  $T_A \leq 12000^\circ \text{K}$ ,  $R \leq 2 \text{ cm}$

Stickstoff:

$\frac{W_m}{a R^2} / \text{cm sec g}^{-1} = 104 \left( \frac{Q_m}{a R^4} / 10^{-2} \text{ sec cm}^2 \right)^{1,4}$ ,  $T_A \geq 12000^\circ \text{K}$ ,  $R \leq 2 \text{ cm}$

Mit wachsender Achsentemperatur werden zuerst die mittlere Geschwindigkeit und der Massendurchfluß kleiner, da die Dichte stark ab- und die Zähigkeit zunimmt. Für größere Achsentemperaturen ändert sich die Dichte nur wenig. Dagegen nimmt die Zähigkeit stark ab. Dadurch steigen beiden Größen wieder schnell an. Eine Vergrößerung des Radius bewirkt lediglich eine Streckung der Kurve in sich. Zu jeder Durchflußmenge gehören zwei verschiedene mittlere Geschwindigkeiten mit zwei Achsentemperaturen.

Um eine Stütze für die Laminarität der Strömung anzugeben, betrachten wir die Abhängigkeit des Massendurchflusses vom Druckgradienten im Rohr bei konstanter Achsen- und Wandtemperatur und Radius. Für laminare Strömungen muß nach (6.2.2) in erster Näherung eine Proportionalität zwischen diesen Größen bestehen. Für isotherme, turbulente Strömungen wird dagegen diese Beziehung durch ein Potenzgesetz beschrieben. Nach [56] gilt für Reynoldssche Zahlen  $Re \leq 10^5$  auf Grund des Blasiussschen Gesetzes, daß der Druckabfall proportional zu  $Q_m^{7/4}$  ist. Wir werden also sagen können, daß die Strömung laminar ist, wenn, wie oben angegeben, Proportionalität zwischen  $a$  und  $Q_m$  besteht. In Abb. 31 ist nach [18] für einen Argonbogen die experimentell bestimmte Durchflußmenge über dem Druckgradienten aufgetragen. Für Druckgradienten größer als 0,007 cm Hg/cm ist eine strenge Proportionalität gewährleistet, so daß wir in diesem Bereich laminare

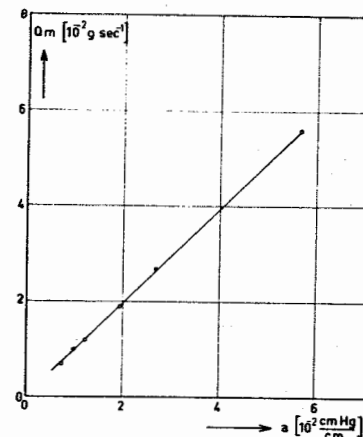


Abb. 31 Der Massendurchfluß als Funktion des Druckgradienten im Argonbogen nach [18] ( $p_0 = 0,15 \text{ atm}$ ,  $I = 150 \text{ A}$ ,  $R = 0,525 \text{ cm}$ ,

Strömung annehmen können. Für kleinere Durchflußmengen ist der Druckgradient im Rohr nicht mehr konstant. Wie dieser Effekt zustande kommt, konnte in [18] nicht angegeben werden.

In Abb. 32 sind der mittlere Enthalpiefluß und die mittlere Enthalpie von Stickstoff über der mittleren Durchflußmenge aufgetragen. Indem man wieder wie oben einen geeigneten Maßstab bei der Auftragung wählt, erreicht man, daß praktisch alle Punkte für verschiedene Achsentemperaturen und Radien auf einer Kurve liegen. Nur bei hohen Achsentemperaturen werden die Abweichungen größer. Der Einfluß der Wandtemperatur ist dagegen relativ stark. Sie bewirkt für kleine Achsentemperaturen eine Erniedrigung und für hohe eine

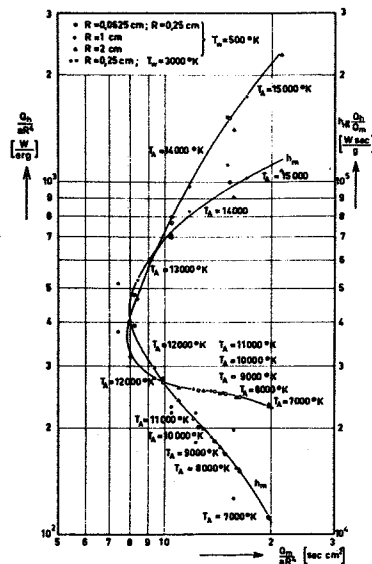


Abb. 32 Der gesamte Enthalpiefuß und die mittlere transportierte Enthalpie als Funktion des gesamten Massenflusses im Stickstoffbogen

Erhöhung der abhängigen Werte.

Nachdem wir nun die Abhängigkeiten der wichtigsten makroskopischen Größen von den Parametern untersucht haben, wollen wir noch auf einige elektrische Größen eingehen, die durch die Strömung im Rohr entstehen müssen. Da der Radialstrom verschwinden soll, muß sich in radialer Richtung ein elektrisches Feld aufbauen, welches die entstehende Induktionsspannung kompensiert. Aus dem Ohmschen Gesetz (6.1.9) erhalten wir für diese Feldstärke den Ausdruck

$$E_r(r) = \mu_{el} w_o H_{\phi_o} = \mu_{el} \frac{\alpha R^3 E_o}{2g} \int_0^g \frac{u}{\mu(s(u))} du \int_0^g \partial(s(u)) u du \quad (6.2.6)$$

Daraus ergibt sich für das zugehörige Potential aus (6.1.7) folgende Beziehung, wobei  $\phi_o$  eine beliebig wählbare Konstante bedeutet.

$$\bar{\phi}_o(s) = -R \int_0^g E_r(u) du = -R \mu_{el} \int_0^g w_o(u) H_{\phi_o}(u) du + \phi_o \quad (6.2.7)$$

Dieses Potential kann nur über eine Raumladung aufgebaut werden.

Aus der Poissongleichung (6.1.8) ergibt sich hierfür der Wert

$$g_{el_o}(s) = \frac{E_o}{R} \frac{1}{g} \frac{d}{ds} g E_r = \mu_{el} E_o \frac{\alpha R^2 E_o}{2} \left[ 2(s(g)) \int_0^g \frac{u du}{\mu(s(u))} - \frac{1}{\mu(s(g))} \int_0^g \partial(s(u)) u du \right] \quad (6.2.8)$$

Um eine Vorstellung von der Größe dieser Werte zu erhalten, sind in den Abb. 33, 34, 35, 36, 37, 38 diese Funktionen für Argon und Stickstoff in Abhängigkeit von der Achsentemperatur angegeben. Die Abb. 39, 40, 41 zeigen die gleichen Größen als Funktion des Radius des Entladungsrohres. Wie wir sehen, reichen schon sehr kleine

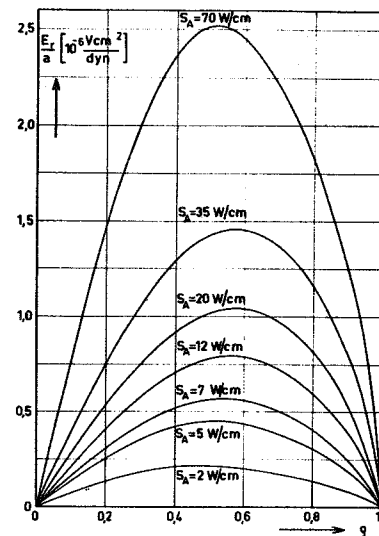


Abb. 33 Die Radialkomponente der Feldstärke im Argonbogen  
(R = 0,25 cm, T\_W = 500°K)



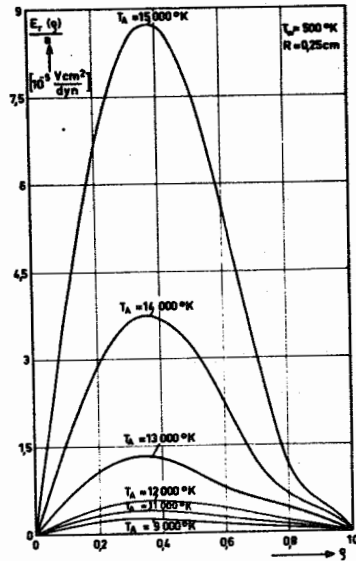


Abb. 34 Die Radialkomponente der Feldstärke im Stickstoffbogen ( $R = 0,25 \text{ cm}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )

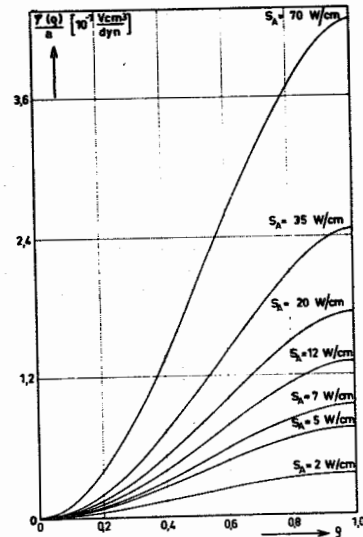


Abb. 35 Die radiale Potentialverteilung im Argonbogen ( $R = 0,25 \text{ cm}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )

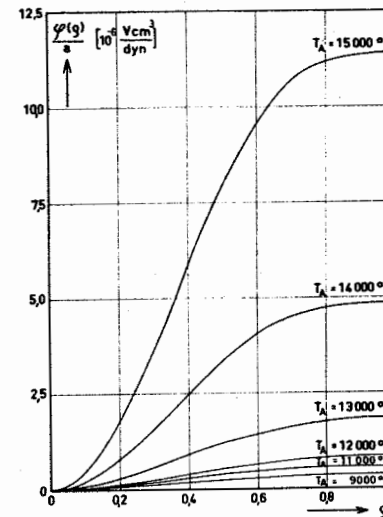


Abb. 36 Die radiale Potentialverteilung im Stickstoffbogen ( $R = 0,25 \text{ cm}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )

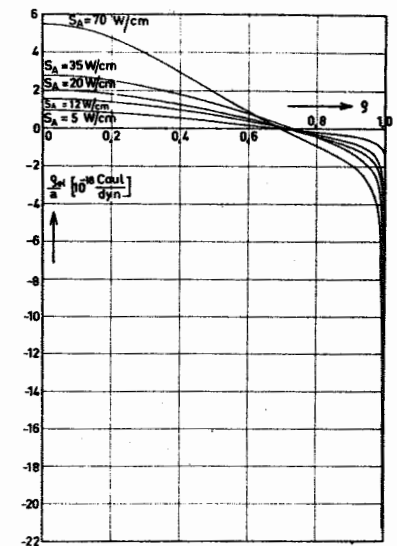


Abb. 37 Die elektrische Ladungsdichteverteilung im Argonbogen ( $R = 0,25 \text{ cm}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )

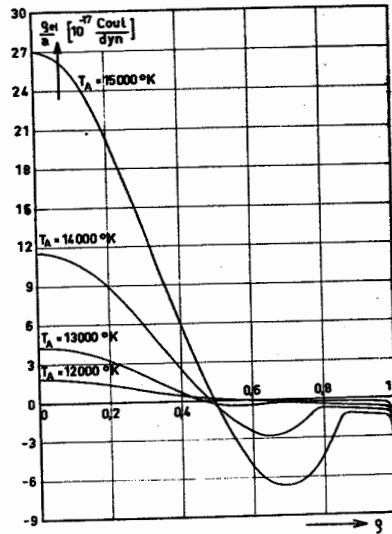


Abb. 38 Die elektrische Ladungsdichteverteilung im Stickstoffbogen ( $R = 0,25 \text{ cm}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )

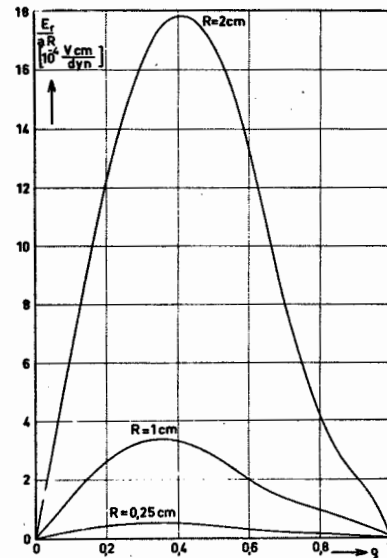


Abb. 39 Die Radialkomponente der elektrischen Feldstärke im Stickstoffbogen ( $T_A = 13\,000^\circ \text{K}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )

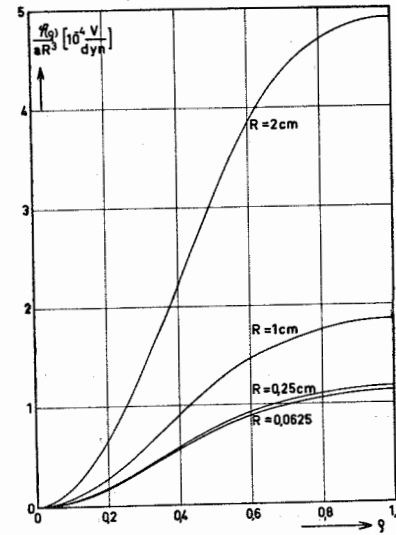
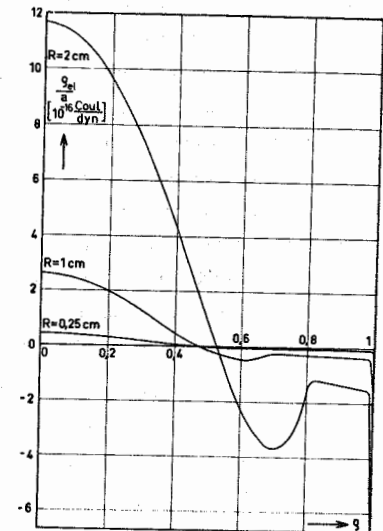


Abb. 40 Die radiale Potentialverteilung im Stickstoffbogen ( $T_A = 13\,000^\circ \text{K}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )

Abb. 41 Die elektrische Ladungsdichteverteilung im Stickstoffbogen ( $T_A = 13\,000^\circ \text{K}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )



Ladungsdichten aus, um eine Gegenkraft gegen die Lorentzkräfte aufzubringen. Wir brauchen also keine Störung unserer Voraussetzung der Quasineutralität zu befürchten. Die maximal in unserem Parameterbereich auftretende Ladungsdichte ergibt sich zu ungefähr  $10^{-14}$  Coul/cm<sup>3</sup>. Der daraus resultierende Elektronen- bzw. Ionenüberschuß von  $10^5$  Teilchen pro cm<sup>3</sup> ist klein gegen die gesamte Elektronen- bzw. Ionendichte  $n_e \approx 10^{17}$  cm<sup>-3</sup> ( $T \approx 10\,000^\circ\text{K}$ ), wenn man von sehr nahen Wandgebieten wieder absieht.

## 7. DIE EIN- UND AUSLAUFSTRÖMUNG IN EINEM WANDSTABILISIERTEN ROTATIONSSYMMETRISCHEN BOGEN

Nachdem wir nun praktisch als Vorstufe die vollausbildete Poiseuille Strömung untersucht und ihre elektrischen, thermischen und dynamischen Eigenschaften abgeleitet haben, wollen wir jetzt das Gebiet des Bogens betrachten, wo sich diese Strömungsform aus dem vorgegebenen Geschwindigkeitsprofil aufbaut. Ein ganz analoges Problem liegt auch im Ausströmbereich des Bogengases vor. Während im vollausbildeten Bereich des Bogens praktisch kein Einfluß der dynamischen Größen auf das thermische und elektrische Verhalten zu verzeichnen ist, wird im Ein- bzw. Auslaufgebiet eine merkbare Wechselwirkung zwischen diesen Größen auftreten, da in diesen Bereichen eine starke Enthalpieproduktion auftritt. Die Effekte, die in diesem Zusammenhang auftreten, sind auch z. B. für den Bau von Heißgaserzeugern (arc heaters) oder zur Simulation von Wiedereintauchproblemen von Satelliten in die Atmosphäre von Planeten (Re-Entry) von großem praktischen Interesse [14, 32, 87].

Um die zahlreichen zum Teil recht komplizierten Geometrien für die Berechnung zu vereinfachen, betrachten wir bei unseren Überlegungen ein halbbunendlich langes, zylindersymmetrisches Rohr, in dem längs der Achse ein Lichtbogen brennt (siehe Abb. 42).

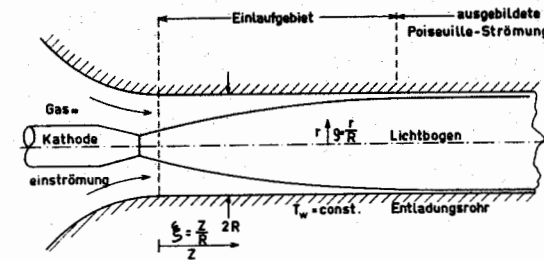


Abb. 42 Übersicht über die behandelte Bogengeometrie

Das Arbeitsgas strömt am Rohranfang in den Lichtbogen ein, und wird hier über eine gewisse Länge  $L$  hin aufgeheizt, die ein Maß für die Einlaufstrecke darstellt. Hinter dieser Einlaufstrecke hat sich eine Poiseuille Strömung ausgebildet, die im letzten Kapitel behandelt wurde.

Da unsere Grundgleichungen für elektrodennahe Gebiete keine Gültigkeit besitzen, wollen wir den Bereich in nächster Nähe der Kathode aus unserer Betrachtung ausschließen. Das Entladungsröhre selbst soll durch Kühlung auf konstanter Wandtemperatur gehalten werden. Damit sich die Poiseuille Strömung tatsächlich ausbilden kann, denken wir uns die Anode sehr weit von der Kathode entfernt. Dabei soll die Länge aber andererseits noch so klein sein, daß der Druckabfall im Rohr noch klein ist gegen den mittleren Druck im Rohr, da nur dann die Kompressibilität und die Druckabhängigkeit der Materialfunktion des Plasmas nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Weiter nehmen wir an, daß sich eine laminare, stationäre Strömung ausbildet, wie es auch auf Grund von Experimenten in ge-

wissen Parameterbereichen gefordert werden muß.

Diese Voraussetzungen genügen, wie wir im folgenden sehen werden, um das Verhalten des Bogens anzugeben.

### 7.1. Die Grundgleichungen und ihre Randbedingungen

Im Falle der hier betrachteten Einlaufströmung in einem rotationssymmetrischen wandstabilisierten Bogen muß, da der Bogen stationär brennen soll, und alle Größen wegen der Symmetrie von der  $\varphi$ -Koordinate nicht abhängen, der vollständige Satz der Grundgleichungen (siehe (3)) in Verbindung mit den Randbedingungen gelöst werden. Dabei besteht eine starke Kopplung zwischen den thermischen, elektrischen und dynamischen Größen, die die Berechnung natürlich stark verkompliziert. Die Nichtlinearität der Gleichungen bedingt weitere Schwierigkeiten, da eine Überlagerung von Lösungen im allgemeinen entfällt. Weiter ist die Vorgabe geeigneter Anfangsbedingungen am Rohranfang problematisch, da hier eigentlich der äußere Kreis mit berücksichtigt werden müßte.

Um trotz der angegebenen Schwierigkeiten eine Lösung des Problems zu erhalten, müssen gewisse Vereinfachungen vorgenommen werden. Dabei wächst natürlich mit dem Grade der Vereinfachung die Ungenauigkeit der Lösung.

Andererseits gelingt es aber, analytische Lösungen zu finden, die eine Diskussion der Eigenschaften im allgemeinen wesentlich erleichtern. In den nächsten Abschnitten sollen eine Reihe von solchen Verfahren erläutert werden.

Vorher wollen wir aber noch einige Variable durch geeignete Voraussetzungen eliminieren. Wie wir in (3.5) gesehen haben, muß bei unserer vorgegebenen Geometrie die elektrische Feldstärke in  $\varphi$ -Richtung verschwinden. Wenn wir außerdem keine äußeren Magnetfelder und keinen Strom in  $\varphi$ -Richtung zulassen, verschwindet das Magnetfeld in  $z$  und  $r$ -Richtung identisch.

Durch diesen Schritt haben wir die Zahl der Gleichungen und der Variablen auf insgesamt zwölf reduziert. Die unbekannten Größen  $p, s_m, T, u, v, w, j_r, j_z, H_\varphi, s_{el}, E_r, E_z$  sind aus diesen Gleichungen als Funktion von  $s$  und  $\xi$  zu berechnen.

Eine weitere Schwierigkeit beruht auf der Tatsache, daß die Materialfunktionen sowohl vom Druck als auch von der Temperatur abhängen. Den Druck im Bogen können wir uns entsprechend zu (6.1.1) wie folgt zusammengesetzt denken.

$$p(s, \xi) = -\alpha R \xi + p_0 + \bar{p}_0(s) + p_1(s, \xi) \quad (7.1.1)$$

Die einzelnen Anteile - konstanter Druckgradient in Achsenrichtung, mittlerer Druck im Rohr, Druckerhöhung durch magnetische Kompression in der ausgebildeten Strömung und Stördruck im Einlaufgebiet - setzen sich additiv zum Gesamtdruck zusammen. Wenn wir voraussetzen, daß die verschiedenen Anteile klein sind gegen den mittleren Druck  $p_0$  (siehe (5.2.3.2) und (6.1.12)), so können wir die Druckabhängigkeit der Materialfunktionen vernachlässigen. Der Druck  $p_0$  ist also nur als Parameter der Materialfunktionen anzusehen. Mit dieser Voraussetzung ist es jetzt möglich, anstelle der Temperatur das Wärmestrompotential als neue abhängige Veränderliche einzuführen. Damit kann ein nichtlinearer Term in der Energiebilanz eliminiert werden. Aus ähnlichen Überlegungen wie in (6.1.) kann man weiter schließen, daß die Dissipation von kinetischer in Wärmeenergie und die Arbeit, die vom Druck durch die Bewegung des Plasmas aufgebracht wird, klein sind gegen die anderen Energieproduktionsterme. Wir können sie also in der Energiebilanz vernachlässigen.

## 7.2. Verschiedene Lösungsmethoden für die thermischen und elektrischen Größen

Zur Berechnung der elektrischen und thermischen Größen im Einströmgebiet stehen unter den obigen Bedingungen folgende Gleichungen zur Verfügung (siehe (3))

$$g_m R \frac{c_p}{2} \left( u \frac{\partial S}{\partial \xi} + w \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( g \frac{\partial S}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} \right) + \frac{R^2}{6} (j_v^2 + j_z^2) - \bar{u} R^2 \quad (7.2.1)$$

$$j_v = G(E_v - \mu_{el} w H_y) = -\frac{1}{R} \frac{\partial H_y}{\partial \xi}, \quad j_z = G(E_z + \mu_{el} u H_y) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} (g H_y) \quad (7.2.2)$$

$$E_v = -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad E_z = -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \quad (7.2.3)$$

$$g_{el} = \frac{E_z}{R} \left( \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} g E_v + \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \right) \quad (7.2.4)$$

Wenn in diesen Beziehungen die Geschwindigkeits- und Dichteverteilung bekannt sind, dann lassen sich hieraus die Temperaturverteilung und die elektrischen Größen bestimmen. Im allgemeinen sind natürlich die Geschwindigkeiten und die Dichte über die restlichen Gleichungen wieder mit den thermischen und elektrischen Größen verknüpft. Unter speziellen Annahmen fällt aber diese Kopplung heraus, so daß die Bestimmung dieser Größen getrennt von der Bestimmung der dynamischen Größen durchgeführt werden kann. Diese Entkopplung kann mit Hilfe von verschiedenen Näherungsannahmen ausgeführt werden, die im folgenden besprochen werden sollen.

### 7.2.1. Eine Näherungslösung für große Durchflußmengen mit Hilfe des Besselmodells

Im folgenden soll eine Methode angegeben werden, die thermischen und elektrischen Eigenschaften des betrachteten Bogenbereiches unter sehr starken Näherungsannahmen in analytischer Form anzugeben. Diese Methode wurde im wesentlichen von Stine

und Watson angegeben [71, 80, 81] und beruht auf einer Anwendung des Besselmodells (siehe (5.1)).

Dazu wird der Bogen in zwei konzentrierte Zylinder aufgeteilt, wobei der innere Zylinder den Radius  $r_i$  bzw.  $g_i \frac{R}{2}$  besitzt. Es wird angenommen, daß nur das Plasma im inneren Zylinder eine elektrische Leitfähigkeit besitzt, die proportional zum Wärmestrompotential ansteigt.

$$G(S) = \begin{cases} 0 & g_i \leq S \leq 1 \\ A(S - S_i) & 0 \leq S \leq g_i \end{cases} \quad S(S_i) = S_i \quad (7.2.1.1)$$

Die Konstanten A und  $S_i$  sind dabei aus der Darstellung von  $G(S)$  (siehe Abb. 4 und 5) auf geeignete Weise zu entnehmen. Es kann also nur im inneren Zylinder ein Strom fließen. Der Abstrahlungsterm wird vernachlässigt, was nach (5.2.2) nur für kleine Radien zulässig ist. Die auf Grund der Bewegung induzierte Feldstärke wird gegen die von außen angelegte Feldstärke vernachlässigt, was beim Fehlen von äußeren Magnetfeldern zulässig ist (siehe (7.2)). Zur Vereinfachung der Rechnung wird angenommen, daß das elektrische Potential auf Ebenen senkrecht zur Achse konstant ist. Es sollen also keine Ströme in  $\eta$ -Richtung fließen. Diese Bedingung wird um so besser erfüllt sein, je größer die Durchflußmenge ist, wie wir noch in (7.2.2) und (8.2) sehen werden. Unter diesen Voraussetzungen wird ebenfalls die  $\eta$ -Komponente der Geschwindigkeit klein sein gegen die axiale Geschwindigkeit. Für die Größe  $g_m w$  in der Energiebilanz wird gemäß der Beziehung (6.2.2) der mittlere Massendurchfluß eingeführt

$$\overline{g_m w} = \frac{G_m}{\pi R^2} \quad (7.2.1.2)$$

Weiter wird das Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck zur Wärmeleitfähigkeit als konstant betrachtet. Diese Konstante ist aus Abb. 3 auf geeignete Weise zu entnehmen. Die Wärmeleitung in Achsenrichtung soll gegen die Radialkomponente vernachlässigt werden.

Alle obigen Näherungsannahmen ermöglichen es jetzt eine analytische Lösung für die thermischen und elektrischen Größen anzugeben. Dazu betrachten wir die reduzierte Energiebilanz (7.2.1) und die Stromtransportgleichung (5.2.2.1) in Verbindung mit dem Ohmschen Gesetz (7.2.2)

$$0 \leq \xi \leq \xi_1: \quad \frac{Q_m}{\pi R} \frac{C_p}{\kappa} \frac{\partial S}{\partial \xi} = \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( g \frac{\partial S}{\partial \xi} \right) + R^2 \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} \quad (7.2.1.3)$$

$$S_1 \leq \xi \leq 1: \quad \frac{Q_m}{\pi R} \frac{C_p}{\kappa} \frac{\partial S}{\partial \xi} = \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( g \frac{\partial S}{\partial \xi} \right)$$

$$E_z = E_z(\xi) = \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( g \frac{\partial S}{\partial \xi} \right) \right) = \frac{I}{2\pi R^2 \int_0^{\xi} g d\xi} \quad (7.2.1.4)$$

Die Rand- und Anfangsbedingungen für S lauten im Intervall zwischen 0 und  $\xi_1$

$$S(\xi, 0) = S_1 + (S_A - S_1) J_0(p_{01} \frac{\xi}{\xi_1}), \quad 0 \leq \xi \leq \xi_1; \quad \frac{\partial S}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0; \quad S(\xi_1) = S_1; \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} S(\xi, \xi) = S_A. \quad (7.2.1.5)$$

Führen wir eine neue Variable  $S^* = S - S_1$  ein und berücksichtigen die Beziehung für die Feldstärke (7.2.1.4), so erhält die Energiebilanz folgende Form

$$\frac{Q_m}{\pi R} \frac{C_p}{\kappa} \frac{\partial S^*}{\partial \xi} = \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( g \frac{\partial S^*}{\partial \xi} \right) + \frac{GI}{4\pi^2 R^2 \left( \int_0^{\xi} g d\xi \right)^2} \quad (7.2.1.6)$$

Diese partielle Differentialgleichung für  $S^*(\xi, \xi)$  kann durch einen Separationsansatz

$$S^*(\xi, \xi) = \bar{R}(\xi) Z(\xi) \quad (7.2.1.7)$$

gelöst werden. Mit den Konstanten

$$B = \frac{Q_m C_p}{\pi R \kappa} \quad \text{und} \quad C = \frac{I^2}{4\pi^2 R^2 A} \cdot \frac{1}{\left( \int_0^{\xi} \bar{R}(\xi) g d\xi \right)^2} \quad (7.2.1.8)$$

stellen sich die beiden Bestimmungsgleichungen für die unbekannten Funktionen  $\bar{R}$  und  $Z$  in folgender Form dar, wobei die Größe  $b$  aus den Randbedingungen zu bestimmen ist.

$$\bar{R}'' + \frac{1}{\xi} \bar{R}' + b^2 \bar{R} = 0 \quad (7.2.1.9)$$

$$B Z' + b^2 Z + C Z^{-1} = 0 \quad (7.2.1.10)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen liefert folgende Abhängigkeiten

$$\bar{R}(\xi) = C_1 J_0(b\xi) + C_2 N_0(b\xi) \quad (7.2.1.11)$$

$$Z(\xi) = \frac{\sqrt{B}}{b} \left( \frac{C}{B} - C_3 e^{-\frac{2b^2}{B} \xi} \right)^{1/2} \quad (7.2.1.12)$$

mit den Integrationskonstanten  $C_1, C_2, C_3$ . Da die Temperaturverteilung endlich bleiben muß, muß  $C_2$  wegen der Singularität der Neumannschen Funktion nullter Ordnung  $N_0$  im Nullpunkt verschwinden. Die spezielle Lösung hat also jetzt die Form

$$S^*(\xi, \xi) = C_1 \frac{\sqrt{B}}{b} J_0(b\xi) \left( \frac{C}{B} - C_3 e^{-\frac{2b^2}{B} \xi} \right)^{1/2} \quad (7.2.1.13)$$

Beachten wir nun die Randbedingungen (7.2.1.5), so ergibt sich als endgültige Lösung für die Temperatur im Innern des Leitfähigkeitszylinders

$$S(\xi, \xi) = S_1 + (S_A - S_1) J_0(p_{01} \frac{\xi}{\xi_1}) \left( 1 - [1 - \frac{2p_{01}^2}{3^2} \xi] e^{-\frac{2p_{01}^2}{3^2} \xi} \right)^{1/2} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_1, \quad (7.2.1.14)$$

wobei zwischen dem Strom und  $S_A$  folgende Bedingung erfüllt sein muß

$$I = 2\pi R (S_A - S_1) J_1(p_{01}) g_1 \sqrt{A}. \quad (7.2.1.15)$$

$p_{01} = 2,405$  [27] bedeutet die erste Nullstelle der Besselfunktion nullter Ordnung. Diese Lösung entspricht für große  $\xi$  der Lösung des zylindrischen Bogens nach dem Besselmodell.

Innerhalb des zweiten Zylinders kann mit den Randbedingungen

$$S(g_1, \xi) = S_1 \text{ und } S_1(1, \xi) = S_w \quad (7.2.1.16)$$

als Lösung nur eine Funktion existieren, die von  $g$  abhängt und keine Funktion von  $\xi$  darstellt. Sie ergibt sich aus (7.2.1.3) zu

$$S(g, \xi) = (S_1 - S_w) \frac{\ln g}{\ln g_1} + S_w \quad g_1 \leq g \leq 1 \quad (7.2.1.17)$$

Durch Differenzen von (7.2.1.14) und (7.2.1.16) läßt sich leicht zeigen, daß der Wärmestrom an der Stelle  $g_1$  außer im Unendlichen, wenn nämlich für  $g_1$  der Ausdruck

$$g_1 = e^{\frac{S_1 - S_w}{S_1 - S_A} \cdot \frac{1}{P_{01} J_1(P_{01})}} \quad (7.2.1.18)$$

gewählt wird, nicht stetig ist. Auf Grund dieser Tatsache ist also eine exakte Lösung für den gesamten Zylinder nicht anzugeben. Die gemachten Vernachlässigungen sind zu groß, um eine vollständige Beschreibung zu erzielen. Nur wenn die Wandtemperatur gleich  $S_1$  wäre, ergäbe sich innerhalb der gemachten Vernachlässigungen eine exakte Lösung.

Dies läßt den Schluß zu, daß eigentlich der Leitfähigkeitsradius  $g_1$  als Funktion von  $\xi$  angenommen werden müßte. Eine Lösung für diesen Fall konnte jedoch in [80] nicht angegeben werden. Um aber trotzdem Aussagen machen zu können, betrachten wir nur die Vorgänge im Leitfähigkeitszylinder und nehmen an, daß dort die oben angegebene Temperaturverteilung (7.2.1.14) Gültigkeit besitzt.

Unter dieser Annahme ergibt sich für die lokale Feldstärke in Achsenrichtung aus Gleichung (7.2.1.4) und der Bedingung (7.2.1.1) der Ausdruck

$$E_z(\xi) = \frac{I P_{01}}{2\pi R^2 \lambda (S_A - S_1) g_1^2 J_1(P_{01})} \cdot \frac{1}{(1 - (1 - \lambda^2) e^{-2P_{01}^2 / g_1^2 B \cdot \xi})^{1/2}} \quad (7.2.1.19)$$

Die Feldstärke in großer Entfernung vom Rohranfang ist also

$$E_0 = \frac{I P_{01}}{2\pi R^2 \lambda (S_A - S_1) g_1^2 J_1(P_{01})} \quad (7.2.1.20)$$

oder mit den Gleichungen (7.2.1.15) und (7.2.1.18)

$$E_0 = \frac{P_{01}}{R \lambda} e^{-\frac{S_1 - S_w}{S_1 - S_A} \cdot \frac{1}{P_{01} J_1(P_{01})}} \quad (7.2.1.21)$$

Für die Spannung zwischen zwei Punkten am Rohranfang und im Abstand  $\xi$  ergibt sich durch Integration von (7.2.1.9) unter Berücksichtigung von (7.2.3)

$$U = -R \int_0^\xi E_z(\xi) d\xi \quad (7.2.1.22)$$

$$= -R E_0 \frac{g_1^2 B}{2 P_{01}} \left[ \ln \left| \frac{\sqrt{1 - (1 - \lambda^2) e^{-2P_{01}^2 / g_1^2 B \cdot \xi}} + 1}{\sqrt{1 - (1 - \lambda^2) e^{-2P_{01}^2 / g_1^2 B \cdot \xi}} - 1} \right| - \ln \left| \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \right| \right]$$

Der Wärmestrom pro Einheitslänge aus dem inneren Zylinder heraus ergibt sich aus Gleichung (5.2.2.12) zu

$$Q_w = -2\pi g_1 \frac{\partial S}{\partial g} \Big|_{g=g_1} = \frac{2\pi (S_A - S_1) P_{01} J_1(P_{01})}{g_w} (1 - (1 - \lambda^2) e^{-2P_{01}^2 / g_1^2 B \cdot \xi})^{1/2} \quad (7.2.1.23)$$

Durch Integration längs der Achse von 0 bis  $\xi$  erhalten wir die gesamten Wärmeverluste aus dem inneren Zylinder auf dieser Länge zu

$$Q_{w_{ges}} = \frac{\pi (S_A - S_1) J_1(P_{01})}{P_{01}} \left[ \frac{R g_1^2 B}{P_{01}} \left[ \ln \left| \frac{\sqrt{1 - (1 - \lambda^2) e^{-2P_{01}^2 / g_1^2 B \cdot \xi}} + 1}{\sqrt{1 - (1 - \lambda^2) e^{-2P_{01}^2 / g_1^2 B \cdot \xi}} - 1} \right| \right. \right. \\ \left. \left. - \ln \left| \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \right| - 2 \left( \sqrt{1 - (1 - \lambda^2) e^{-2P_{01}^2 / g_1^2 B \cdot \xi}} - \lambda \right) \right] \right] \quad (7.2.1.24)$$

Für die elektrisch zugeführte Energie pro Einheitslänge verifiziert man mit Hilfe von (7.2.1.19)

$$P_{el} = 2\pi E_z(\xi) R^2 \int_0^{g_1} g dg = I E_z(\xi) = \frac{I E_0}{P_{el0}} (1 - (1 - \lambda^2) e^{-2P_{01}^2 / g_1^2 B \cdot \xi})^{1/2} \quad (7.2.1.25)$$

Die gesamte auf der Strecke zwischen Null und  $\xi$  zugeführte elektrische Energie ergibt sich hieraus durch Integration zu:

$$P_{el\ ges} = R \int_0^{\xi} P_{el} d\xi = R I E_0 \frac{g_1^2 B}{2 \rho_{oi}} \left[ \ln \left| \frac{\sqrt{1 - (1-\alpha^2) e^{-2\rho_{oi}^2 / g_1^2 B \cdot \xi}} + 1}{\sqrt{1 - (1-\alpha^2) e^{-2\rho_{oi}^2 / g_1^2 B \cdot \xi}} - 1} \right| - \ln \left| \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \right| \right] \quad (7.2.1.26)$$

Daraus ergibt sich ein lokaler Wirkungsgrad für die Gasaufheizung von

$$\eta_e = \frac{P_{el} - Q_w}{P_{el}} = (1-\alpha^2) e^{-2\rho_{oi}^2 / g_1^2 B \cdot \xi} \quad (7.2.1.27)$$

Der globale Wirkungsgrad hat entsprechend folgende Form

$$\eta_g = \frac{P_{el\ ges} - Q_{w\ ges}}{P_{el\ ges}} = 2 \frac{\sqrt{1 - (1-\alpha^2) e^{-2\rho_{oi}^2 / g_1^2 B \cdot \xi}} - \alpha}{\ln \left| \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right| \frac{\sqrt{1 - (1-\alpha^2) e^{-2\rho_{oi}^2 / g_1^2 B \cdot \xi}} + 1}{\sqrt{1 - (1-\alpha^2) e^{-2\rho_{oi}^2 / g_1^2 B \cdot \xi}} - 1}} \quad (7.2.1.28)$$

Diese Funktionen sind in den Abbildungen 43 bis 45 dargestellt.

Zu diesem Zweck wurden sämtliche Größen in geeigneter Weise normiert.  $\alpha$  wurde in den Abbildungen 43 und 44 als Null, in der Abbildung 45 als 1/2 angenommen. Als charakteristischen Wert für die Einlaufstrecke können wir die Größe  $L_{einl} = \lambda_o^{-1}$  definieren. Sie liefert eine Aussage über die Länge der Strecke, die nötig ist, um das Gas soweit aufzuheizen, daß sämtliche interessierenden Größen weniger als 100/e % von ihrem Wert im Unendlichen abweichen.

Wenn man diese Länge in Einheiten des Rohrradius mißt, dann erhält man folgenden Wert für diese Größe

$$L_{einl} = \lambda_o^{-1} = \frac{g_1^2 g_m c_p}{2 \rho_{oi}^2 \pi R \alpha} \quad (7.2.1.29)$$

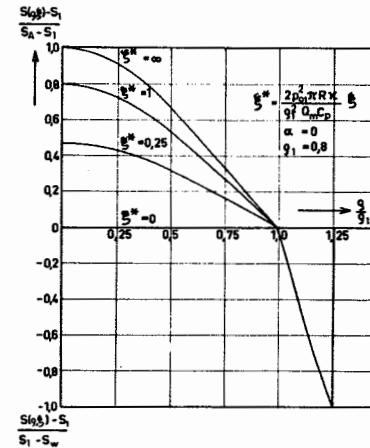
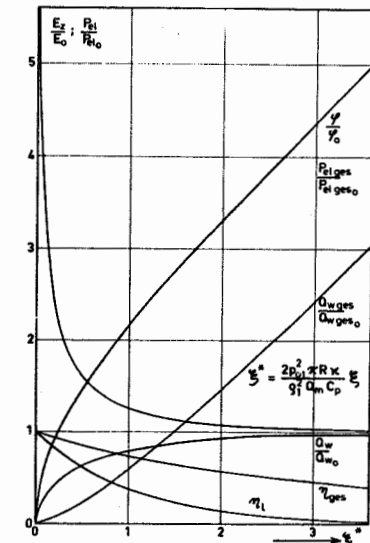


Abb. 43 Die Wärmestrompotentia verteilung nach dem Besselmodell

Abb. 44 Einige charakteristische Größen als Funktion einer charakteristischen Koordinate in Achsenrichtung nach dem Besselmodell ( $\alpha = 0$ )





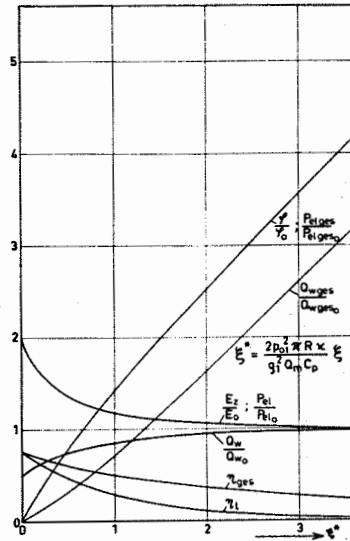


Abb. 45 Einige charakteristische Größen als Funktion einer charakteristischen Koordinate in Achsenrichtung nach dem Besselmodell ( $\alpha = 0,5$ )

Wie wir sehen, ist die Einlaufstrecke in dieser nullten Näherung nur eine Funktion der Durchflußmenge, da sich die Größen  $g$  und  $c_p/\kappa$  nur wenig mit der Achsentemperatur oder dem Strom ändern. Eine genauere Diskussion wollen wir auf das nächste Kapitel verschieben. Dort wollen wir auch die numerischen Werte mit anderen Ergebnissen vergleichen.

## 7.2.2 Die Linearisierung der Grundgleichungen

Während wir im letzten Abschnitt eine Methode dargelegt haben, das elektrische und thermische Verhalten im Einlaufgebiet des Bogens unter starken Näherungsannahmen durch eine Linearisierung der elektrischen Leitfähigkeit bezüglich der Wärmestrompotentialfunktion zu erhalten, wollen wir jetzt einen Weg angeben, der mit weniger Näherungsannahmen auskommt. Wir gehen dazu vom Verhalten des Bogens in großer Entfernung vom Rohranfang aus. Hier wird das Verhalten in guter Übereinstimmung mit dem Experiment durch die Gleichungen und Parameterabhängigkeiten dargestellt, die in den Kapiteln (5) und (6) besprochen wurden. Im Einlaufgebiet des Bogens können wir uns dann alle Größen aus dem entsprechenden Wert im Unendlichen und einer Störgröße zusammengesetzt denken. Wenn wir die Störgröße durch den Index eins charakterisieren, erhalten wir auf diesem Wege folgende Darstellung für die abhängigen Variablen:

$$\begin{aligned}
 P &= -\alpha R f + p_0 + \bar{p}_0(s) + p_1(s, f) & H_y &= H_{y0}(s) + H_{y1}(s, f) \\
 g_m &= g_{m0}(s) + g_1(s, f) & S_{el} &= S_{el0}(s) + g_1(s, f) \\
 u &= u_1(s, f) & E_z &= E_0 + E_{z1}(s, f) \\
 v &= v_1(s, f) & E_v &= E_{v0}(s) + E_{v1}(s, f) \\
 w &= w_0(s) + w_1(s, f) & y &= \bar{y}_0(s) - ERf + y_1(s, f) \\
 T &= T_0(s) + T_1(s, f) & f_z &= f_{z0}(s) + f_{z1}(s, f) \\
 S &= S_0(s) + S_1(s, f) & f_v &= f_{v1}(s, f)
 \end{aligned}
 \tag{7.2.2.1}$$

Für die Störgrößen bestehen neben der Eigenschaft, daß alle diese Veränderlichen per definitionem im Unendlichen verschwinden müssen, folgende Randbedingungen, die sich aus den allgemeinen Bedingungen ergeben, die in (3.7) abgeleitet wurden:

$$\begin{aligned} P_{1g}(0, \xi) = g_{1g}(0, \xi) = 0 & \quad S_{1g}(0, \xi) = S_1(1, \xi) = 0 \\ u_{1g}(0, \xi) = u_{1g}(1, \xi) = 0 & \quad H_{1g}(0, \xi) = H_{1g}(1, \xi) = 0 \\ v_{1g}(0, \xi) = v_{1g}(1, \xi) = 0 & \quad g_{1g}(0, \xi) = g_{1g}(1, \xi) = 0 \\ W_{1g}(1, \xi) = w_{1g}(0, \xi) = 0 & \quad E_{v1g}(0, \xi) = E_{v1g}(1, \xi) = 0 \\ T_{1g}(0, \xi) = T_{1g}(1, \xi) = 0 & \quad j_{v1g}(0, \xi) = j_{v1g}(1, \xi) = 0. \end{aligned} \quad (7.2.2.2)$$

Neben diesen Randbedingungen sind noch Anfangsbedingungen für verschiedene Größen am Rohreingang anzugeben, die auf Grund von Erhaltungssätzen gewisse Verträglichkeitsbedingungen erfüllen müssen. Auf die Problematik dieser Größen werden wir später noch eingehen.

Zur Vereinfachung des betrachteten Problems wollen wir annehmen, daß alle Störgrößen klein gegen die entsprechenden Werte der Variablen im Unendlichen sind. Dazu sollen analog die Radial- und Tangentialkomponenten der Geschwindigkeit bzw. die radiale Stromdichte von kleinerer Größenordnung als die zugehörigen Werte in Achsenrichtung sein. Diese Voraussetzungen werden wegen des stetigen Übergangs der Kenngrößen in den ausgebildeten Bogenbereich auf jeden Fall auf einer gewissen Länge des Einlaufgebietes erfüllt, so daß die obige Bedingung gerechtfertigt ist.

Wenn wir jetzt die obigen Ansätze (7.2.2.1) in die Grundgleichungen (siehe (3)) einführen, können wir auf Grund der vorausgesetzten Größenverhältnisse Glieder höherer Ordnung vernachlässigen. Deshalb können wir auch alle Materialfunktionen bezüglich der Störgrößen linearisieren. Dies liefert mit der schon erwähnten Beziehung,

daß alle Druckterme klein sind gegen den Ruhedruck  $p_0$ , folgende Darstellung, wobei der Index' Differentiation nach  $S$  bedeutet:

$$\begin{aligned} m(p, T) &\approx m(p_0, S) \approx m(p_0, S_0(S)) + m'(p_0, S_0(S)) S_1(S, \xi) \\ \mu(p, T) &\approx \mu(p_0, S) \approx \mu(p_0, S_0(S)) + \mu'(p_0, S_0(S)) S_1(S, \xi) \\ \bar{u}(p, T) &\approx \bar{u}(p_0, S) \approx \bar{u}(p_0, S_0(S)) + \bar{u}'(p_0, S_0(S)) S_1(S, \xi) \\ c(p, T) &\approx c(p_0, S) \approx c(p_0, S_0(S)) + c'(p_0, S_0(S)) S_1(S, \xi) \\ \kappa(p, T) &\approx \kappa(p_0, S) \approx \kappa(p_0, S_0(S)) + \kappa'(p_0, S_0(S)) S_1(S, \xi) \\ \rho(p, T) &\approx \rho(p_0, S) \approx \rho(p_0, S_0(S)) + \rho'(p_0, S_0(S)) S_1(S, \xi). \end{aligned} \quad (7.2.2.3)$$

Auf Grund der Definition des Wärmestrompotentials (4.2.14) ergibt sich hieraus für den Zusammenhang zwischen  $S_1$  und  $T_1$  folgende linearisierte Beziehung

$$S_1(S, \xi) = \kappa(p_0, S_0(S)) T_1(S, \xi). \quad (7.2.2.4)$$

Berücksichtigen wir alle diese Bedingungen und beachten die Grundgleichungen für die Größen des ausgebildeten Lichtbogens, so besitzen die Bestimmungsgleichungen für die Störgrößen folgende Form:

$$P_1 = p_0 (g_{m1}/g_{m0} + S_1 [\kappa_0^{-1} T_0^{-1} - m_0'/m_0]) \quad (7.2.2.5)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial S} (g g_{m0} u_{1g}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (g m_0 W_{1g} + g m_0 w_0) = 0 \quad (7.2.2.6)$$

$$\begin{aligned} g m_0 w_0 u_{1g} &= \frac{\partial}{\partial S} (-P_1 + \frac{\mu_0}{g} (u_{1g} + \frac{u_1}{g} + w_{1g}) - \mu_{el} H_{y0} H_{y1}) + \frac{\mu_0}{g} [u_{1gs} + \\ &+ \frac{u_{1g}}{g} - \frac{u_1}{g^2} + u_{1gf}] + \frac{\mu_0 S_0'}{R} [u_{1g} - \frac{u_1}{g} - w_{1g} + \frac{w_0}{S_0} S_{1g}] - 2 \mu_{el} \frac{H_{y0} H_{y1}}{g} \end{aligned} \quad (7.2.2.7)$$

$$g m_0 w_0 v_{1g} = \frac{\mu_0}{R} [v_{1gf} + v_{1gs} + \frac{v_{1g}}{g} - \frac{v_1}{g^2}] + \frac{\mu_0 S_0'}{R} (v_{1g} - \frac{v_1}{g}) \quad (7.2.2.8)$$

$$\begin{aligned} g m_0 w_0 w_{1g} + g m_0 w_0 u_{1g} &= \frac{\partial}{\partial \xi} (-P_1 + \frac{\mu_0}{g} (u_{1g} + \frac{u_1}{g} + w_{1g}) - \mu_{el} H_{y0} H_{y1}) \\ &+ \mu_0/R [w_{1gs} + \frac{w_{1g}}{g} + w_{1gf}] + \frac{\mu_0 S_0'}{R} [w_{1g} + u_{1g} + \frac{S_1}{g} (w_0'' + \frac{w_0'}{g}) + \frac{w_0'}{g^2} S_{1g} \\ &+ \frac{\mu_0}{g} w_0' S_1] \end{aligned} \quad (7.2.2.9)$$

$$g_{m_0} R \frac{E_{20}}{2} w_0 S_0' \left( \frac{u_1}{w_0} + \frac{S_{1f}}{S_0} \right) = \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial s} S \frac{\partial S_1}{\partial s} + S_{1ff} + \frac{2R^2}{G_0} f_{z1} - \left( \frac{G_0}{R^2} R^2 f_{z0} + R^2 \bar{u}_0' \right) S_1 \quad (7.2.2.10)$$

$$f_{y1} = -\frac{1}{R} H_{y1f}; \quad f_{z1} = \frac{1}{R} \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial s} S H_{y1} \quad (7.2.2.11)$$

$$E_{y1} = -\frac{1}{R} \varphi_{1s}; \quad E_{z1} = -\frac{1}{R} \varphi_{1f} \quad (7.2.2.12)$$

$$\frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial s} S f_{y1} + \frac{\partial}{\partial s} f_{z1} = 0 \quad (7.2.2.13)$$

$$g_{el1} = -\frac{E_0}{R^2} \left( \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial s} S \varphi_{1s} + \varphi_{1ff} \right) \quad (7.2.2.14)$$

$$f_{y1} = G_0 \left( -\frac{1}{R} \varphi_{1s} - \mu_{el} (w_1 H_{y0} + w_0 H_{y1}) \right) \quad (7.2.2.15)$$

$$f_{z1} = G_0 \left( -\frac{1}{R} \varphi_{1f} + \mu_{el} H_{y0} u_1 \right) + G_0' E_0 S_1 \quad (7.2.2.16)$$

Hierbei wurde aus entsprechenden Gründen wie weiter oben in der Energiebilanz wieder die Arbeit der Druckkräfte und die durch Reibung in Wärme umgewandelte kinetische Energie gegen die anderen Energieteile vernachlässigt.

Um eine weitere wesentliche Vereinfachung vornehmen zu können, wollen wir die induzierten Störfeldstärken gegen die angelegten abschätzen. Aus den Gleichungen (7.2.2.15) und (7.2.2.16) erhalten wir für das Verhältnis der induzierten zur angelegten Feldstärke in radialer bzw. axialer Richtung, wenn wir außerdem noch Gleichung (6.1.9) berücksichtigen,

$$\left| \frac{\mu_{el} (w_1 H_{y0} + w_0 H_{y1})}{E_{y1}} \right| = \left| \frac{E_{y0}}{E_{y1}} \right| \left| \frac{w_1}{w_0} + \frac{H_{y1}}{H_{y0}} \right| \ll 1 \quad (7.2.2.17)$$

$$\left| \frac{\mu_{el} H_{y0} u_1}{E_{z1}} \right| = \left| \frac{E_{y0}}{E_{z1}} \right| \left| \frac{u_1}{w_0} \right| \ll 1.$$

Diese Ausdrücke sind beide klein gegen eins, da die Feldstärke in radialer Richtung im ausgebildeten Bogen klein ist gegen die Störgrößen, und außerdem noch auf Grund der Voraussetzung die anderen

Ausdrücke kleiner als eins sind. Wir können also die induzierte Feldstärke gegen die angelegte vernachlässigen. Weiter ist es zulässig, die Enthalpiezunahme in radialer Richtung gegen die in axialer Richtung zu vernachlässigen, wenn wir annehmen, daß die radiale Geschwindigkeit bezogen auf die Geschwindigkeit der Poiseuille Strömung klein ist gegen den Störwärmestrom in Achsenrichtung bezogen auf den radialen Wärmestrom im ausgebildeten Bogen.

Diese beiden Vernachlässigungen bedeuten eine wesentliche Vereinfachung der Gleichungen, die das thermische und elektrische Verhalten der Einlaufströmung bestimmen. Sie bewirken nämlich eine Entkopplung dieser Gleichungen von den dynamischen Bestimmungsgleichungen.

In dieser Näherung sind also die thermischen und elektrischen Eigenschaften des Einstromgebietes unabhängig vom dynamischen Verhalten in diesem Bereich. Es stellt sich durch die Kopplung der thermischen und elektrischen Größen eine Temperaturverteilung und ein elektrisches Feld ein, deren Gestalt dann das dynamische Verhalten in diesem Gebiet bestimmt. Auf Grund dieser Tatsache vereinfacht sich natürlich die Berechnung ganz erheblich.

Um die Bestimmungsgleichungen für die thermischen und elektrischen Größen zu erhalten, eliminieren wir mit Hilfe der Gleichungen (7.2.2.13), (7.2.2.15) und (7.2.2.16) in der Energiebilanz (7.2.2.10) und in der Erhaltungsgleichung der Ladung (7.2.2.13) alle Größen bis auf  $S_1$  und  $\varphi_1$ . Dies liefert folgende zwei gekoppelte lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für  $S_1$  und  $\varphi_1$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{1ss} + \varphi_{1s} (S^{-1} + g_1'(s)) + \varphi_{1ff} &= g_2(s) S_{1f} \\ S_{1ss} + S^{-1} S_{1s} + S_{1ff} - g_3(s) S_{1f} + g_4(s) \varphi_1 &= g_5(s) \varphi_{1f} \end{aligned} \quad (7.2.2.18)$$

Hierbei wurden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} g_1(s) &= \ln \mathcal{E}(S_0(s)) / \mathcal{E}^*; \quad g_1'(s) = \mathcal{E}_0' S_0' \mathcal{E}_0^{-1}; \quad g_2(s) = R E_0 \mathcal{E}_0' \mathcal{E}_0^{-1}; \\ g_3(s) &= g_{m_0} R c_{p_0} w_0 \mathcal{E}_0^{-1}; \quad g_4(s) = R^2 (E_0^2 \mathcal{E}_0' - \bar{u}_0'); \\ g_5(s) &= 2 R E_0 \mathcal{E}_0; \quad g_6(s) = R^2 E_0^2 \mathcal{E}_0'. \end{aligned} \quad (7.2.2.19)$$

Die Randbedingungen für  $S_1$  und  $g_1$  lauten nach (7. 2. 2. 2)

$$S_{1g}(0, \xi) = S_1(1, \xi) = g_{1g}(0, \xi) = g_{1s}(1, \xi) = 0 \quad (7. 2. 2. 20)$$

Wenn man die Lösung dieser Gleichung berechnet hat, kann man alle anderen thermischen und elektrischen Größen daraus bestimmen.

Dabei sind neben den beiden behandelten Variablen noch folgende Größen von Bedeutung

Für den gesamten lokalen Wärmestrom durch die Wand mit der Einheitslänge ergibt sich

$$Q_w(\xi) = -2\pi (S_0(1) + S_{1g}(1, \xi)) = [P_{el0} - P_{rad0}] - 2\pi S_{1g}(1, \xi). \quad (7. 2. 2. 21)$$

Hieraus erhält man den gesamten Wärmestromverlust auf der Länge  $z$  durch Integration zu

$$Q_{wges}(\xi) = \int_0^\xi Q_w R d\xi = Q_{w0} R \xi - 2\pi R \int_0^\xi S_{1g}(1, \xi) d\xi. \quad (7. 2. 2. 22)$$

Die entsprechenden Werte für die elektrisch zugeführte Leistung und die Abstrahlung ergeben sich analog zu oben

$$P_{el}(\xi) = 2\pi R^2 \int_0^1 g E g dg = P_{el0} + 2\pi \int_0^1 (-g_s(s) g_{1f} + g_c(s) S_1) g dg \quad (7. 2. 2. 23)$$

$$P_{elges}(\xi) = R \int_0^\xi P_{el}(\xi) d\xi = P_{el0} R \xi + 2\pi \int_0^\xi \int_0^1 (-g_s(s) g_{1f} + g_c(s) S_1) g dg d\xi \quad (7. 2. 2. 24)$$

$$P_{rad}(\xi) = 2\pi R \int_0^1 \bar{u} g dg = P_{rad0} + 2\pi \int_0^1 (g_c(s) - g_4(s)) S_1 g dg \quad (7. 2. 2. 25)$$

$$P_{radges}(\xi) = R \int_0^\xi P_{rad}(\xi) d\xi = P_{rad0} R \xi + 2\pi R \int_0^\xi \int_0^1 (g_c(s) - g_4(s)) S_1 g dg d\xi \quad (7. 2. 2. 26)$$

Für die zeitliche Zunahme der Enthalpie des Gases auf der Länge  $z$   $R d\xi$  ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\Delta h_e = 2\pi \int_0^1 g_s(s) S_{1f} g dg. \quad (7. 2. 2. 27)$$

Die gesamte Enthalpieerhöhung pro Zeiteinheit auf der Länge  $z$  beträgt dann

$$\Delta h_{ges} = 2\pi R \int_0^\xi \int_0^1 g_s(s) S_{1f} g dg d\xi. \quad (7. 2. 2. 28)$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen erhält man für den lokalen Wirkungsgrad der Aufheizung

$$\eta_e = \frac{\Delta h_e}{P_{el}} = \frac{\int_0^1 g_s(s) S_{1f} g dg}{P_{el0}/2\pi + \int_0^1 (-g_s(s) g_{1f} + g_c(s) S_1) g dg} \quad (7. 2. 2. 29)$$

Ein entsprechender Ausdruck ergibt sich für den globalen Wirkungsgrad auf der Länge  $z$

$$\eta_{ges} = \frac{\Delta h_{ges}}{P_{elges}} = \frac{\int_0^\xi \int_0^1 g_s(s) S_{1f} g dg d\xi}{\int_0^\xi P_{el0}/2\pi + \int_0^\xi (-g_s(s) g_{1f} + g_c(s) S_1) g dg d\xi} \quad (7. 2. 2. 30)$$

### 7. 2. 2. 1 Analytische Lösung bei konstanten Koeffizienten

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, daß bei geeigneter Linearisierung der Grundgleichungen die Kopplung zwischen den dynamischen und elektrischen bzw. thermischen Größen beseitigt werden kann. Die daraus resultierenden Gleichungen (7. 2. 2. 18) mit den zugehörigen Randbedingungen (7. 2. 2. 20) ergeben ein System von zwei gekoppelten linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für das elektrische Potential und die Wärmestrompotentialfunktion. Zur Lösung dieser Differentialgleichungen machen wir einen Separationsansatz für die abhängigen Veränderlichen

$$g_1(s, \xi) = g_2(s) g_3(\xi) \quad (7. 2. 2. 1. 1)$$

$$S_1(s, \xi) = S_1(s) g_4(\xi).$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Differentialgleichungen ein (7.2.2.18), so folgt notwendigerweise, daß die beiden Funktionen  $g_1(\xi)$  und  $g_2(\xi)$  bis auf eine Konstante übereinstimmen müssen. Für die Abhängigkeit von  $\xi$  kommt nur eine e-Funktion mit negativen Exponenten in Frage, da die Lösungen im Unendlichen verschwinden müssen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir also annehmen, daß  $g_1$  und  $g_2$  gleich sind, was physikalisch ein gleichmäßiges Abklingen der thermischen und elektrischen Störgrößen bedeutet

$$g_1(\xi) = g_2(\xi) = e^{-\lambda \xi} \quad \lambda > 0 \quad (7.2.2.1.2)$$

Berücksichtigen wir diese Abhängigkeit, so liefern die Differentialgleichungen (7.2.2.18) folgende Bestimmungsgleichungen für  $S_2(\xi)$  und  $g_2(\xi)$

$$g_2'' + g_2' (g_1^{-1} + g_2' g_1) + \lambda^2 g_2 = -\lambda g_2(\xi) S_2$$

$$S_2'' + S_2' g_1' + (\lambda^2 + g_2(\xi) \lambda + g_2(\xi)) S_2 = -\lambda g_2(\xi) g_2 \quad (7.2.2.1.3)$$

Eine analytische Lösung dieses Systems kann angegeben werden, wenn die Funktionen  $g_1$  bis  $g_5$  konstant sind, d. h. wenn man geeignete Mittelwerte einsetzt. In diesem Falle erfüllt ein Ansatz der Form

$$g_2(\xi) = A J_0(b_2 \xi) \quad S_2(\xi) = B J_0(b_2 \xi) \quad (7.2.2.1.4)$$

die Differentialgleichungen, wobei  $J_0$  die Besselfunktion nullter Ordnung angibt. Da das homogene Gleichungssystem für A und B nur nicht-triviale Lösungen besitzt, wenn die Determinante verschwindet, erhält man folgende Bestimmungsgleichung für b

$$b^2 = (\lambda^2 + \frac{g_1}{2} \lambda + \frac{g_2}{2}) \pm \sqrt{\lambda^2 (\frac{g_1^2}{4} + g_2 g_1) + \frac{g_2 g_1}{2} \lambda + \frac{g_2^2}{4}} \quad (7.2.2.1.5)$$

Es existieren also zwei verschiedene Lösungen der obigen Form (7.2.2.1.4) mit  $b_1$  und  $b_2$ . Entsprechend gibt es zwei Werte von A und B, zwischen denen folgende Beziehung bestehen muß

$$B_1 = \frac{\lambda^2 - b_1^2}{\lambda g_2} A_1, \quad B_2 = \frac{\lambda^2 - b_2^2}{\lambda g_2} A_2 \quad (7.2.2.1.6)$$

Wegen der Linearität der Gleichungen ist auch die Summe der beiden Lösungen wieder eine Lösung

$$g_2(\xi) = A_1 J_0(b_1 \xi) + A_2 J_0(b_2 \xi)$$

$$S_2(\xi) = B_1 J_0(b_1 \xi) + B_2 J_0(b_2 \xi) \quad (7.2.2.1.7)$$

Wie wir in (7.2.2.2) sehen werden, ist diese Lösung die einzige Lösung des Differentialgleichungssystems (7.2.2.1.3), die im Nullpunkt keine Singularität besitzt. Die anderen beiden Lösungen könnten dabei mit Hilfe der Neumannschen Funktion nullter Ordnung erhalten werden.

Um nun die endgültige Lösung und die Eigenwerte zu erhalten, brauchen wir nur zu berücksichtigen, daß (7.2.2.1.7) die Randbedingungen (7.2.2.20) erfüllen muß. Dies liefert folgende Gleichungen

$$B_1 J_0(b_1) + B_2 J_0(b_2) = 0$$

$$A_1 b_1 J_1(b_1) + A_2 b_2 J_1(b_2) = 0 \quad (7.2.2.1.8)$$

Da nichttriviale Lösungen nur erhalten werden können, wenn die Determinante dieses Gleichungssystems unter Berücksichtigung von (7.2.2.1.6) identisch verschwindet, können nur solche  $\lambda_k > 0$  zugelassen werden, die folgende charakteristische Bedingung erfüllen.

$$0 = b_{2k} (\lambda_k^2 - b_{1k}^2) J_0(b_{1k}) J_1(b_{2k}) - b_{1k} (\lambda_k^2 - b_{2k}^2) J_0(b_{2k}) J_1(b_{1k}) \quad (7.2.2.1.9)$$

$k=1,2,\dots$

Außerdem besteht dann zwischen  $A_1$  und  $A_2$  folgende Beziehung

$$A_{2k} = - \frac{b_{1k} J_1(b_{1k})}{b_{2k} J_1(b_{2k})} A_{1k} \quad (7.2.2.1.10)$$

Mit der Abkürzung

$$A_k = \frac{A_{1k}}{b_{2k} J_1(b_{2k})} \quad (7.2.2.1.11)$$

erhalten wir als endgültige Lösung des Problems alle Eigenfunktionen  $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}$  zum Eigenwert  $\lambda_k > 0$  in folgender Form

$$\begin{aligned}\varphi_{2k}(\xi) &= A_k (b_{2k} J_1(b_{1k}) J_0(b_{1k}\xi) - b_{1k} J_1(b_{1k}) J_0(b_{2k}\xi)) \\ S_{2k}(\xi) &= \frac{A_k}{\lambda_k g_2} ([\lambda_k^2 - b_{1k}^2] b_{2k} J_1(b_{1k}) J_0(b_{1k}\xi) - (\lambda_k^2 - b_{2k}^2) b_{1k} J_1(b_{2k}) J_0(b_{2k}\xi)).\end{aligned}\quad (7.2.2.1.12)$$

Die allgemeine Lösung setzt sich, da die Differentialgleichungen (7.2.2.18) linear sind, aus all diesen Eigenfunktionen additiv zusammen.

$$\begin{aligned}S_1(\xi, \eta) &= \sum_k S_{2k}(\xi) e^{-\lambda_k \eta} \\ \varphi_1(\xi, \eta) &= \sum_k \varphi_{2k}(\xi) e^{-\lambda_k \eta}.\end{aligned}\quad (7.2.2.1.13)$$

Dabei können die Konstanten  $A_k$  beliebig angenommen werden. Sie bestimmen die Anfangsbedingungen der Funktionen an der Stelle  $\xi = 0$ . Welche Anfangsbedingungen dabei zugelassen sind, soll im nächsten Abschnitt besprochen werden.

Nachdem wir nun unter den obigen Bedingungen eine Lösung gefunden haben, können wir mit Hilfe von den Gleichungen (7.2.2.11), (7.2.2.12), (7.2.2.14), (7.2.2.15) und (7.2.2.16) alle anderen interessierenden, lokalen Größen bestimmen. Wir erhalten folgende Ausdrücke

$$j_{v1} = -\frac{E_0}{R} \sum_k \varphi'_{1k}(\xi) e^{-\lambda_k \eta} = \sum_k j_{v2k}(\xi) e^{-\lambda_k \eta} \quad (7.2.2.1.14)$$

$$j_{z1} = \sum_k \left( \frac{E_0}{R} \varphi_{1k}(\xi) \lambda_k + \varepsilon_0 E_0 S_{2k}(\xi) \right) e^{-\lambda_k \eta} = \sum_k j_{z2k}(\xi) e^{-\lambda_k \eta} \quad (7.2.2.1.15)$$

$$E_{v1} = -\frac{1}{R} \sum_k \varphi'_{1k}(\xi) e^{-\lambda_k \eta} = \sum_k E_{v2k}(\xi) e^{-\lambda_k \eta} \quad (7.2.2.1.16)$$

$$E_{z1} = \frac{1}{R} \sum_k \varphi_{1k}(\xi) \lambda_k e^{-\lambda_k \eta} = \sum_k E_{z2k}(\xi) e^{-\lambda_k \eta} \quad (7.2.2.1.17)$$

$$S_{el1} = \frac{\varepsilon_0}{R^2} \sum_k (g_2 \lambda_k S_{2k}(\xi) + g_1 \varphi'_{1k}(\xi)) e^{-\lambda_k \eta} = \sum_k S_{el2k}(\xi) e^{-\lambda_k \eta} \quad (7.2.2.1.18)$$

$$H_{z1} = +R \sum_k j_{z2k}(\xi) \frac{1}{\lambda_k} e^{-\lambda_k \eta} = \sum_k H_{z2k}(\xi) e^{-\lambda_k \eta} \quad (7.2.2.1.19)$$

Die globalen Größen bestimmen sich aus den Gleichungen (7.2.2.21) bis (7.2.2.30).

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir noch kurz auf einen Spezialfall der obigen Bedingungen eingehen, bei dem sich eine wesentliche Erleichterung der Berechnungen erzielen läßt. Wenn die elektrische Leitfähigkeit nur sehr schwach ansteigt, dann können wir in (7.2.2.19) in erster Näherung  $g_1, g_2$  und  $g_3$  gleich Null setzen. In diesem Fall ergeben sich aus (7.2.2.1.5) für  $b_1$  und  $b_2$  folgende Ausdrücke

$$b_{1k} = \sqrt{\lambda_k^2 + g_3 \lambda_k}, \quad b_{2k} = \lambda_k \quad (7.2.2.1.20)$$

Aus der charakteristischen Gleichung (7.2.2.1.9) ergibt sich dann notwendigerweise, daß  $b_{1k}$  gleich der  $k$ . Nullstelle der Besselfunktion nullter Ordnung  $p_{0k}$  sein muß. Die Eigenwerte  $\lambda_k$  lassen also folgende Darstellung zu

$$\lambda_k = \frac{g_3}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{p_{0k}^2}{g_3^2}} - 1 \right). \quad (7.2.2.1.21)$$

Für große Durchflußmengen ergibt sich eine weitere Vereinfachung für den kleinsten Eigenwert  $\lambda_1$  aus der Tatsache, daß unter diesen Bedingungen  $g_3$  sehr viel größer ist als  $2 p_{01}$ . Indem wir die Wurzel in (7.2.2.1.21) in eine Reihe entwickeln, ergibt sich unter der obigen Voraussetzung

$$\lambda_1 = \frac{p_{01}^2}{g_3} = \frac{\lambda_0}{2} g_1^2. \quad (7.2.2.1.22)$$

Unter diesen Bedingungen ist also die Einlaufstrecke gerade um den Faktor  $2 g_1^{-2}$  so lang wie die, die aus dem Besselmodell berechnet wurde (siehe (7.2.1)).

### 7.2.2.2. Numerische Lösung bei variablen Koeffizienten

Im letzten Abschnitt haben wir gezeigt, daß eine analytische Lösung des behandelten Problems erhalten werden kann, wenn man für die Funktionen  $g_4$  bis  $g_6$  geeignete Mittelwerte einsetzt. Wenn diese Funktionen dagegen stark variieren, wie es zu erwarten ist, dann ist man auf numerische Lösungsmethoden angewiesen.

In diesem Falle gehen wir davon aus, daß zu jedem  $\lambda > 0$  vier linear unabhängige Lösungen des Differentialgleichungssystems (7.2.2.1.3) existieren müssen. Wir erhalten solche vier Lösungen, indem wir folgende Anfangsbedingungen für  $y_1$  und die ersten drei Ableitungen an der Stelle  $q$  gleich Null vorschreiben.

$$\left[ \frac{1}{\lambda}, 0, 0, 0 \right]; \left[ 0, 1, 0, 0 \right]; \left[ 0, 0, 1, 0 \right]; \left[ 0, 0, 0, 1 \right]. \quad (7.2.2.2.1)$$

Wie wir aus (7.2.2.1.3) ersehen können, liefern die zweite und vierte Anfangsbedingung nur Lösungen, wo  $S_2$  im Nullpunkt eine Singularität besitzen würde. Aus der Endlichkeitsbedingung für physikalisch sinnvolle Lösungen folgt dann, daß nur Lösungen mit der ersten und der dritten Anfangsbedingung von Interesse sind. Wie man leicht zeigen kann, gehören zu diesen zwei Funktionen  $y_{1I}(q)$  und  $y_{1II}(q)$  auch zwei linear unabhängige Lösungen  $S_{2I}(q)$  und  $S_{2II}(q)$  mit folgenden Anfangsbedingungen

$$\left[ y_1(0), 0 \right] \quad \text{und} \quad \left[ 2\lambda^{-1} y_1(0), 0 \right] \quad (7.2.2.2.2.)$$

Auf Grund der Linearität der Differentialgleichung ist auch die Summe der beiden Lösungen wieder eine Lösung. Wenn wir folgenden Ansatz machen, erfüllt diese Summe für die Funktionen  $y$  schon alle Randbedingungen (7.2.2.20)

$$y_2(q) = c \left( y_{1I}'(\lambda, 1) y_{1I}(q) - y_{1I}'(\lambda, 1) y_{1II}(q) \right) \quad (7.2.2.2.3)$$

$$S_2(q) = c \left( y_{1I}'(\lambda, 1) S_{2I}(q) - y_{1I}'(\lambda, 1) S_{2II}(q) \right).$$

Es bleibt noch die Randbedingung  $S_2(1) = 0$  zu erfüllen. Dies liefert folgende charakteristische Gleichung für die Eigenwerte  $\lambda_k > 0$

$$g(\lambda) = y_{1I}'(\lambda, 1) S_{2I}(\lambda, 1) - y_{1I}'(\lambda, 1) S_{2II}(\lambda, 1) = 0. \quad (7.2.2.2.4)$$

Mit Hilfe dieser Umformung des Randwertproblems mit der Bestimmung der Eigenwerte in ein Anfangsproblem mit einer charakteristischen Gleichung ist es also jetzt gelungen, auch im Fall der variablen Funktionen  $g_1$  bis  $g_5$  einen numerischen Weg zur Bestimmung aller interessierenden Größen anzugeben.

Die numerischen Rechnungen wurden wieder mit dem Digitalrechner Siemens 2002 durchgeführt. Das Programm dazu war wie folgt angelegt. Es bestand im Wesentlichen aus einem Nullstellensucher [31] für die charakteristische Gleichung (7.2.2.2.4). Die verschiedenen Lösungen des Gleichungssystems (7.2.2.1.3) mit den verschiedenen Anfangsbedingungen (7.2.2.2.1) und (7.2.2.2.2) wurden mit Hilfe der Methode von Runge-Kutta [31] für Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung bestimmt. Dabei betrug die Anfangsstützstellenzahl 51. Die Anfangsschrittweite wurde so lange halbiert, bis die Abweichungen der verschiedenen Lösungsfunktionen an der Stelle  $q=1$  kleiner als ein vorgegebener Fehler von 1 % ausfielen. Die Fehlerabfrage für den Nullstellensucher von  $g(\lambda)$  war so angelegt, daß der Eigenwert  $\lambda_k$  bei einem Vorzeichenwechsel von  $g(\lambda)$  als bestimmt galt, wenn folgender Ausdruck

$$\frac{|S_2(\lambda_k, 1)|}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |S_2(\lambda_k, q_j)|} \quad (7.2.2.2.5)$$

kleiner als ein vorgegebener Fehler von  $\delta = 0,0005$  ausfiel. Die Anzahl der zu bestimmenden Nullstellen konnte beliebig vorgegeben werden. Die zur Rechnung nötigen Funktionen  $g_1(q)$  bis  $g_5(q)$  waren im Programm für den wandstabilisierten zylindersymmetrischen Bogen (siehe (5)) für eine Stützstellenzahl von 51 Werten mitberechnet worden und lagen in Lochkartenform vor. Wenn nach der oben angegebenen

Methode ein Eigenwert  $\lambda_k$  gefunden worden war, wurden alle anderen interessierenden Größen mit einer Stützstellenzahl von 91 Werten berechnet und ausgedruckt. Für diese ganzen Rechnungen war im Mittel eine Rechenzeit von ungefähr einer Stunde pro Eigenwert erforderlich.

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir noch kurz auf das Problem der Anfangsbedingungen eingehen. Wie wir gesehen haben, sind die Eigenfunktionen bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Diese Faktoren  $C_K$  sind aus den Anfangsbedingungen für eine Funktion an der Stelle  $\xi = 0$  zu bestimmen. Leider haben die bestimmten Eigenfunktionen den Nachteil, daß sie nicht orthogonal sind. Will man also eine vorgegebene Anfangsbedingung - vorausgesetzt daß dieses möglich ist - nach den Eigenfunktionen entwickeln, so sind die Koeffizienten davon abhängig, bei welchem Gliede man die Reihe abbricht. Um diesen Nachteil zu eliminieren, kann man die Eigenfunktion an der Stelle  $\xi = 0$  nach dem Verfahren von Gram-Schmidt [31] orthonormieren. Diese Methode kann auf folgende Weise durchgeführt werden. Gegeben seien die linear unabhängigen Eigenfunktionen  $X_{1k}(\xi)$ , die an der Stelle  $\xi = 0$  eine mit den Funktionen  $X_{1k}(\xi)$  verträgliche Anfangsbedingung erfüllen sollen und in folgender Form dargestellt werden können

$$X_{1k}(\xi) = X_{2k}(\xi) e^{-\lambda_k \xi} \quad k=1,2,3,\dots \quad (7.2.2.6)$$

Wir bilden nun aus diesen Funktionen durch folgende Rekursionsformel die Funktionen  $Y_{1k}(\xi)$

$$Y_{1k}(\xi) = X_{1k}(\xi) - \sum_{e=1}^{k-1} \int_0^1 Z_{1e}(\xi,0) X_{1e}(\xi) d\xi Z_{1e}(\xi), \quad (7.2.2.7)$$

wobei die Funktionen  $Z_{1k}(\xi)$  durch folgende Beziehung definiert sind

$$Z_{1k}(\xi) = \frac{Y_{1k}(\xi)}{\sqrt{\int_0^1 Y_{1k}^2(\xi) d\xi}} \quad (7.2.2.8)$$

Auf Grund dieser Definition erfüllen die Funktionen  $Z_{1k}(\xi)$  die Differentialgleichungen und bilden an der Stelle  $\xi=0$  ein orthonormiertes System von Funktionen, d. h. es gilt

$$\int_0^1 Z_{1k}(\xi,0) Z_{1j}(\xi,0) d\xi = \delta_{kj} \quad (7.2.2.9)$$

Die allgemeine Lösung besitzt jetzt wegen der Linearität der Gleichungen folgende Form

$$Z_1(\xi) = \sum_k a_k Z_{1k}(\xi) \quad (7.2.2.10)$$

Wenn die vorgegebene Anfangsbedingung an der Stelle  $\xi=0$  eine Darstellung nach (7.2.2.10) erlaubt, dann müssen die Koeffizienten  $a_k$  folgende Form haben

$$a_k = \int_0^1 Z_{10}(\xi) Z_{1k}(\xi) d\xi \quad (7.2.2.11)$$

damit die quadratische Abweichung im Mittel minimal ist. Welche von den Funktionen (7.2.2.1.14) bis (7.2.2.1.19) die Anfangsbedingung erfüllen soll, ist im Prinzip willkürlich. Nur sind dadurch die Anfangsbedingungen der anderen Funktionen festgelegt. Eigentlich müßte, um die richtigen Anfangsbedingungen zu erhalten, der äußere Stromkreis mitberücksichtigt werden. Dabei ist darauf zu achten, daß gewisse Anfangsbedingungen noch Verträglichkeitsbedingungen erfüllen müssen. Wenn z. B. eine Anfangsbedingung für die z-Komponente der Stromdichte gefordert wird, dann muß der Gesamtstrom gleich dem Strom im Unendlichen sein. Diese Verträglichkeitsbedingungen werden also auf Grund der Erhaltungssätze gefordert.



### 7.3. Die Bestimmung des dynamischen Verhaltens

Nachdem wir verschiedene Methoden angegeben haben, das elektrische und thermische Verhalten des Bogens im Einlaufgebiet zu berechnen, wollen wir uns jetzt dem dynamischen Verhalten zuwenden. Die dynamischen Eigenschaften werden dabei bedeutend schwieriger zu erfassen sein, da die Kopplung mit den thermischen Größen hier nicht ohne weiteres eliminiert werden kann. Will man trotzdem Aussagen machen, so ist man darauf angewiesen, z. T. sehr starke Näherungsannahmen zu machen.

Ohne auf weitere Einzelheiten einzugehen, wollen wir zwei Wege angeben, die eine Bestimmung des dynamischen Verhaltens ermöglichen. Im ersten Fall gehen wir dabei von den linearisierten Grundgleichungen (7.2.2) aus, indem wir die Voraussetzungen, die dort getroffen wurden, übernehmen. In den Gleichungen (7.2.2.5) bis (7.2.2.9) stehen uns fünf Gleichungen zur Verfügung, die fünf noch unbekannten Funktionen  $p_1, S_{m,1}, u_1, v_1, w_1$  zu bestimmen. Dabei setzen wir natürlich  $S_1$  und  $H_3$  als bekannt voraus. Als erste wichtige Eigenschaft dieser Gleichungen fällt sofort auf, daß die Bestimmungsgleichung für die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit (siehe (7.2.2.8)) von den anderen Größen entkoppelt ist.

$$v_{1,ss} + v_{1,9}(S^{-1} + \mu_0' S_0' \mu_0'^{-1}) - \frac{1}{3} v_1 (\frac{1}{3} + \mu_0' S_0' \mu_0'^{-1}) + v_{1,ss} - \frac{3m_0 w_0 R}{\mu_0} v_{1,ss} = 0 \quad (7.3.1)$$

In dieser Näherung hat also die Tangentialströmung keinen Einfluß auf die anderen Größen. Diese Eigenschaft ist charakteristisch für alle Rohrströmungen mit schwachem Drall [12, 82]. Entsprechend zu (7.2) kann man wieder eine analytische Lösung erhalten, wenn für die Funktionen

$$g_1(q) = \ln \mu_0 (S_0(q)) / \mu^* \quad \text{und} \quad g_9(q) = \frac{3m_0 w_0 R}{\mu_0} \quad (7.3.2)$$

wieder geeignete Mittelwerte eingesetzt werden

$$g_1' = 0 \quad \text{und} \quad g_9 \approx \frac{a_m}{\pi R \mu_0} \quad (7.3.3)$$

Mit den Randbedingungen

$$v_1(0, \xi) = v_1(1, \xi) = 0 \quad (7.3.4)$$

erhält man eine Lösung durch einen Separationsansatz in folgender Form

$$v_{1,k}(q, \xi) = c_{1,k} J_1(p_{1,k} q) e^{-\lambda_k \xi} \quad (7.3.5)$$

wobei für  $\lambda_k$  die Beziehung gilt

$$\lambda_k = \frac{g_9}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4p_{1,k}^2}{g_9^2}} - 1 \right) \quad k=1,2,3 \dots \quad (7.3.6)$$

$J_1$  bedeutet dabei die Besselfunktion erster Ordnung,  $p_{1,k}$  die k. Nullstelle dieser Funktion. Für große Durchflußmengen ergibt sich für den ersten Eigenwert  $\lambda_1$  folgende Näherungsformel

$$\lambda_1 = \frac{p_{1,1}^2}{g_9} = \lambda_0 \frac{p_{1,1}^2}{p_{0,1}^2} \frac{g_1^2}{2} \frac{\overline{u_0 c_{p,0}}}{\overline{u_0}} \quad (7.3.7)$$

Die Einlaufstrecke für die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit ist also um den Faktor  $\frac{p_{1,1}^2}{p_{0,1}^2} \frac{g_1^2}{2} \frac{\overline{u_0 c_{p,0}}}{\overline{u_0}}$  kleiner als die thermische und elektrische Einlaufänge, die sich aus dem Besselmodell ergibt (siehe (7.2.1)). Die allgemeine Lösung des obigen Problems setzt sich aus der Summe von allen Eigenfunktionen (7.3.5) zusammen

$$v_1(q, \xi) = \sum_k c_{1,k} J_1(p_{1,k} q) e^{-\lambda_k \xi} \quad (7.3.8)$$

Die Konstanten  $c_{1,k}$  sind dabei aus der Anfangsbedingung  $v_{1,0}(q)$  zu bestimmen. Da die Funktionen  $J_1(p_{1,k} q)$  auf dem Intervall von 0 bis 1 orthogonal sind, ergeben sich die  $c_{1,k}$  in folgender Form

$$c_{1,k} = - \frac{2}{J_0(p_{1,k}) J_2(p_{1,k})} \int_0^1 v_{1,0}(q) J_1(p_{1,k} q) q dq \quad (7.3.9)$$

Dabei muß natürlich  $v_{1,0}(q)$  eine Darstellung nach (7.3.8) erlauben.

Wenn die Änderungen der Funktionen  $g_1(q)$  und  $g_9(q)$  relativ groß sind, dann muß die Differentialgleichung (7.3.1) numerisch ge-

löst werden. Man kann wieder die gleiche Methode wie in (7. 2. 2. 2) anwenden. Die Anfangsbedingungen für die gesuchte Funktion  $v_2(\xi)$  an der Stelle  $\xi = 0$  heißen in diesem Falle

$$[0, 1, 0] \quad (7. 3. 10)$$

Die Eigenwerte sind dabei aus der Bedingung

$$v_2(\lambda_k, 1) = 0 \quad (7. 3. 11)$$

zu errechnen. Die allgemeine Lösung setzt sich wieder aus der Summe der Eigenfunktionen zusammen

$$v_2(\xi) = \sum_k v_2(\lambda_k, \xi) e^{-\lambda_k \xi} \quad (7. 3. 12)$$

Da die Eigenfunktionen in diesem Falle nicht mehr orthogonal sind, muß man, um vorgegebene Anfangsbedingungen zu erfüllen, auf ein entsprechendes Verfahren zurückgreifen, das in (7. 2. 2. 2) dargelegt wurde.

Nachdem wir nun zwei Methoden untersucht haben, die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit zu bestimmen, wollen wir jetzt noch angeben, welche Bestimmungsgleichungen für die radiale und axiale Komponente der Geschwindigkeit gültig sind. Zu diesem Zweck eliminieren wir aus den Gleichungen (4. 2. 25) und (7. 2. 2. 6) die Störgrößen des Druckes  $p_1$  und der Dichte  $\rho_{m,1}$ . Dies liefert folgende Beziehungen

$$\rho_{m,1} = -\frac{\rho_{m,0}}{w_0} \left( w_{1,\xi} + \frac{1}{\rho_{m,0}} \frac{\partial}{\partial \xi} \rho_{m,0} u_1 \right) \quad (7. 3. 13)$$

$$p_{1,\xi} = p_0 \left( s_{1,\xi} \left( \frac{1}{\alpha_{1,0}} - \frac{m_1}{m_0} \right) - \frac{1}{w_0} \left( w_{1,\xi} + \frac{1}{\rho_{m,0}} \frac{\partial}{\partial \xi} \rho_{m,0} u_1 \right) \right) \quad (7. 3. 14)$$

Setzt man diese Größen in die Gleichungen (7. 2. 2. 7) und (7. 2. 2. 9) ein, so erhält man zwei gekoppelte partielle Differentialgleichungen mit inhomogenen Seiten für  $u_1$  und  $w_1$ . Zur Bestimmung der Einlaufänge für die Geschwindigkeitskomponenten, für den Druck und die Dichte müssen diese Gleichungen mit den entsprechenden Randbedingungen

gelöst werden. Dabei tritt die Schwierigkeit auf, daß sowohl die Lösung der homogenen Gleichungen - diese könnten analog zu (7. 2. 2. 2) erhalten werden - als auch die der inhomogenen berechnet werden müssen. Diese Tatsache bedeutet eine sehr starke Komplikation. Deshalb werden wir diese Untersuchung im Rahmen dieser Arbeit nicht durchführen. Für den isothermen Fall verweisen wir auf eine Arbeit von Punnis [51].

Neben dieser oben behandelten Methode, eine Lösung durch Linearisierung der Grundgleichungen mit Hilfe von Störgrößen zu erhalten, existiert in der Literatur noch eine Methode [72, 73], die einen Weg zur Bestimmung der dynamischen Größen angibt. Man teilt dazu den Bogen wieder in zwei konzentrische Bereiche ein, wobei das innere Volumen das aufgeheizte Gas enthalten soll. Man nimmt an, daß die Strömung in diesem Bereich durch eine freie Strömung beschrieben werden kann. Die Strömung im äußeren Bereich soll isotherm sein und durch die eindimensionalen Gleichungen der Gasdynamik zu erfassen sein. An der Berührfläche der beiden Teilbereiche sollen die Lösungen so angepaßt werden, daß die Erhaltungsgleichungen für die Masse, den Impuls und die Energie erfüllt sind. Zur Berechnung der inneren freien Strömung findet die Näherungsmethode von Karman und Fohlhausen [56] Verwendung. Da diese Methode auf große numerische Schwierigkeiten führt und bisher noch keine Ergebnisse vorliegen, wollen wir nicht weiter darauf eingehen.

## 8. DIE NUMERISCHEN ERGEBNISSE FÜR EINEN STICKSTOFFBOGEN

Nachdem wir einige Methoden abgeleitet haben, das thermische, elektrische und dynamische Verhalten eines achsenrotationssymmetrischen wandstabilisierten Lichtbogens zu berechnen, wollen wir jetzt diese Methoden auf einen Stickstoffbogen anwenden. Stickstoff als Arbeitsgas wurde deshalb gewählt, weil bei ihm einerseits die wichtigsten Materialfunktionen am besten bekannt sind und zum anderen, weil in den meisten experimentellen Anordnungen, die bisher in der Literatur behandelt worden sind, Stickstoff benutzt wird. Leider ist in den meisten Fällen ein direkter Vergleich von theoretischen Werten und experimentellen Größen nicht durchführbar, da lokale Größen sehr schwierig zu messen sind und deshalb noch keine diesbezüglichen Meßdaten vorliegen. Meist sind in den experimentellen Arbeiten nur globale Größen angegeben [80, 71, 81, 87, 32, 14, 52, 10]. Jedoch ist auch hier beim Vergleich die genaue Geometrie der Versuchsanordnung zu berücksichtigen.

### 8.1. Die Länge der Einlaufstrecke

Eine der wichtigsten Größen beim Studium der Eigenschaften des Einlaufgebietes ist die Länge der Einlaufstrecke. Sie ist ein Maß dafür, in welcher Entfernung vom Rohranfang die verschiedenen Größen des Bogens bis auf einen gewissen Prozentsatz mit den entsprechenden Größen des vollausgebildeten Bogens übereinstimmen. In unserem Falle wollen wir jeweils als Einlauflänge den Kehrwert des kleinsten Eigenwertes  $\lambda_1 > 0$  definieren, wobei die Einlauflänge in Rohrradien gemessen werden soll,

$$L_{\text{einl}} = \frac{1}{\lambda_1} \quad (8.1.1)$$

Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben, muß man eigentlich für die thermischen und elektrischen Größen und für die dynamischen Variablen verschiedene Einlauflängen definieren, da diese Größen verschieden schnell abklingen. Die Einlauflänge hängt von allen Parametern ab,

die auch die Größe der Eigenwerte bestimmen. Diese Größen sind die Wand- und Achsentemperatur, der Radius des Entladungsrohres, der Druckgradient in Achsenrichtung und der mittlere Druck im Rohr. Schon rein anschaulich wird man zwei Grenzfälle unterscheiden können. Wenn einmal die Durchflußgeschwindigkeit sehr groß ist, wird die Einlauflänge praktisch nur davon abhängen, wie schnell das Gas aufgeheizt werden kann. In diesem Fall werden also alle Größen von Bedeutung sein, die bei der Enthalpieproduktion eine Rolle spielen. Im Grenzfall von kleinen Durchflußmengen wird die Gasaufheizung zu vernachlässigen sein. Die Einlaufstrecke wird in diesem Fall in erster Linie von der Größe der elektrischen Leitfähigkeit, der Wärmeleitfähigkeit und der spezifischen Abstrahlung abhängen. Es wird sich ein ähnliches Verhalten einstellen, wie es bei einem stromdurchflossenen Draht gegeben ist, wo die Einspeisung des Stromes nicht gleichmäßig über den Anfangsquerschnitt erfolgt.

In (7.2.1) haben wir als erste Näherung für die thermische und elektrische Einlauflänge folgenden Ausdruck aus dem Besselmodell abgeleitet

$$L_{\text{einl}0} = \frac{1}{\lambda_0} = \left( \frac{c_{pa}}{a_0} \right) \frac{S_1^2}{2\pi p_0} \frac{Q_m}{Q} \quad (8.1.2)$$

Diese Einlauflänge wurde unter der Bedingung gefunden, daß die Größe der Durchflußmenge das Verhalten des Bogens wesentlich mitbestimmt. Wie wir sehen, besteht eine direkte Proportionalität zwischen dem gesamten Massenfluß und der Einlauflänge. Dagegen ist keine merkbare Abhängigkeit von den elektrischen Größen zu verzeichnen. In der Abb. 46 ist die Größe  $\lambda_0 a R_{g1}^2$  über der Achsentemperatur aufgetragen. Als Parameter wurden dabei verschiedene Radien und zwei verschiedene Wandtemperaturen gewählt.

Wie wir sehen, sinkt die Einlauflänge für alle Parameter zuerst mit wachsender Achsentemperatur, um dann nach einem Minimum bei  $12 - 13 \cdot 10^4$  K wieder praktisch auf den Anfangswert anzusteigen. In dem angegebenen Achsentemperaturbereich variiert die

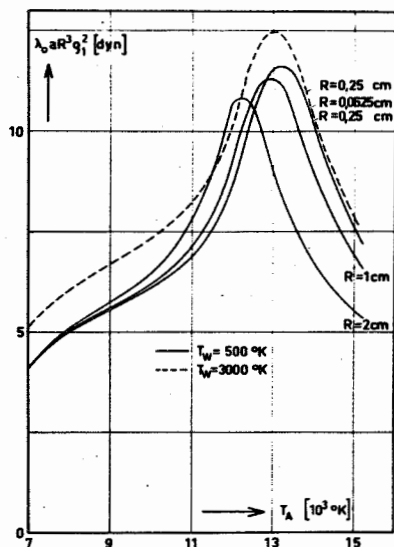


Abb. 46 Die reziproke Einlaufänge als Funktion von verschiedenen Parametern im Stickstoffbogen

Einlaufänge ungefähr um den Faktor zwei. Der Einfluß der Wandtemperatur auf die Einlaufänge macht sich vor allem bei kleinen Achsentemperaturen bemerkbar. Da der Massendurchfluß mit steigender Wandtemperatur kleiner wird (siehe Abb. 30), wird auch die Einlaufänge entsprechend kleiner werden. Dieser Einfluß kann in dem angegebenen Temperaturbereich maximal ungefähr 20 % ausmachen. Die Abhängigkeit der Einlaufänge vom Radius läßt sich in erster Näherung durch ein Potenzgesetz mit dem Exponenten 3 beschreiben, wobei für große Radien die Einlaufstrecke noch etwas stärker anwächst. Da der Massendurchfluß streng proportional zum Druckgradienten anwächst, wächst auch die Einlaufstrecke proportional zu  $a$  an.

Wie wir schon betont haben, gelten die obigen Näherungsergebnisse nur für den Grenzfall von großen Durchflußmengen. Bei kleineren Geschwindigkeiten muß man die thermische und elektrische Einlaufänge nach den Methoden berechnen, die in den Abschnitten (7. 2. 2. 1) und (7. 2. 2. 2) dargelegt wurden. In der Abb. 47 ist der kleinste numerisch berechnete Eigenwert für verschiedene Parameterwerte aufgetragen.

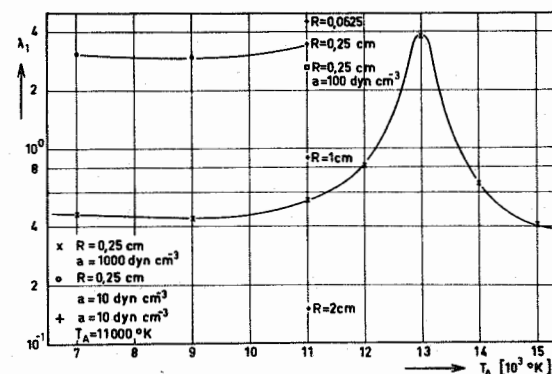


Abb. 47 Der kleinste Eigenwert  $\lambda_1$  als Funktion von verschiedenen Parametern

Wie wir sehen, liegen alle berechneten Eigenwerte in der Größenordnung von eins. Die Einlaufstrecke ist demnach immer von der Größenordnung des Radius des Entladungsrohres. Das Verhalten der Einlaufänge in Abhängigkeit von der Achsentemperatur entspricht im wesentlichen dem oben angegebenen Verhalten, jedoch tritt bei kleineren Achsentemperaturen zusätzlich noch eine kleine Vergrößerung von  $L_{\text{ein}}$  auf. Die Proportionalität bezüglich  $a$  ist natürlich nicht mehr gegeben, da für kleine  $a$  gerade die Terme wesentlich werden,

die bei der Ableitung des obigen Ausdrucks für die Einlauflänge vernachlässigt wurden. Ebenfalls verliert das Potenzgesetz für die Abhängigkeit von  $R$  seine Gültigkeit. Wir können nur sagen, daß mit wachsendem  $R$  die Einlauflänge größer wird, und zwar um so mehr, je größer der Radius wird.

Die Einlauflänge für die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit hat nach (7.3) für große Durchflußmengen den Wert

$$L_{\text{ein}t} = \frac{1}{\lambda_{t_0}} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{2 p_{01}^2}{p_{01}^2} \left( \frac{M_0}{c_{p_0}} \right) \frac{1}{\mu_0} \cdot g_1^2, \quad (8.1.3)$$

wenn man die Länge in Rohrradien angibt.

Der Faktor  $\frac{2 p_{01}^2}{p_{01}^2} \left( \frac{M_0}{c_{p_0}} \right) \frac{1}{\mu_0}$  ist in folgender Tabelle für einige Werte von  $T_A$  angegeben.

$T_A [10^3 \text{ K}]$	7	9	11	13	15
$L_{\text{ein}t_0} / g_1^2 L_{\text{ein}t_{g_1}}$	2,1	1,95	2,3	3,9	11,5

Wenn wir für  $g_1$  ungefähr 0,6 annehmen, dann stellen wir fest, daß die Einlauflänge für die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit von der gleichen Größenordnung wie die Einlauflänge für die thermischen Größen ausfällt. Für kleine Achsentemperaturen ist sie etwas kleiner, für größere länger.

## 8.2. Die thermischen und elektrischen Störgrößen

In diesem Abschnitt sollen die thermischen und elektrischen Störgrößen auf ihre Parameterabhängigkeit und ihren Verlauf untersucht werden. Sie wurden mit Hilfe der numerischen Methode berechnet, die in (7.2.2.2) angegeben wurde.

Es sei hier schon erwähnt, daß die entsprechenden Größen, die aus der analytischen Näherungslösung, die in (7.2.2.1) behandelt wurde, berechnet werden können, qualitativ die gleichen Ergebnisse liefern; jedoch treten hier natürlich quantitative Abweichungen auf. Wir werden deshalb nur numerische Werte angeben, die nach der oben erwähnten Methode bestimmt wurden.

Die wichtigsten Größen, die das Verhalten der Lösung des Differentialgleichungssystems (7.2.2.18) bestimmen, sind die Funktionen  $g_1(q)$  bis  $g_5(q)$ . Um uns einen Überblick über ihren Verlauf zu verschaffen, sind in der Abb. 48 diese Funktionen für feste Parameter-

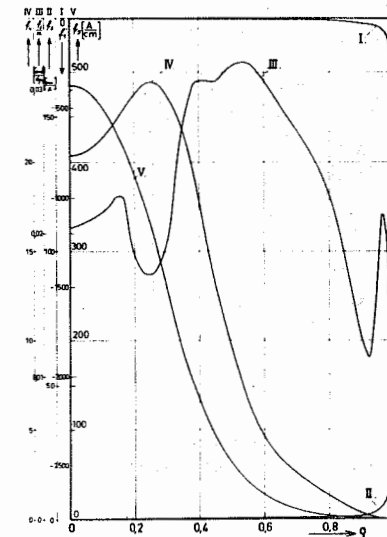


Abb. 48 Die charakteristischen Funktionen  $g_1$  bis  $g_5$  ( $T_A = 11\,000^\circ\text{K}$ ;  $T_W = 500^\circ\text{K}$ ,  $R = 0,25\text{ cm}$ )

werte ( $T_A = 11\,000^\circ\text{K}$ ,  $R = 0,25\text{ cm}$ ,  $T_W = 500^\circ\text{K}$ ) über dem normierten Radius aufgetragen. Wie wir sehen, haben die Funktionen  $g_1$  und  $g_2$  vor allem in der Nähe der Wand einen starken Einfluß auf die Lösungen. Die drei anderen Funktionen sind dagegen vor allem in Achsennähe von Bedeutung. In Abhängigkeit von den Parametern halten alle Funktionen außer  $g_4$  ihr jeweiliges Vorzeichen bei;  $g_4$  kann sowohl positive als auch negative Werte annehmen.

In den Abb. 49 bis 60 sind die berechneten Störgrößen zum kleinsten Eigenwert als Funktion des normierten Radius für verschiedene Parameter  $T_A$ ,  $R$  und  $a$  aufgetragen.

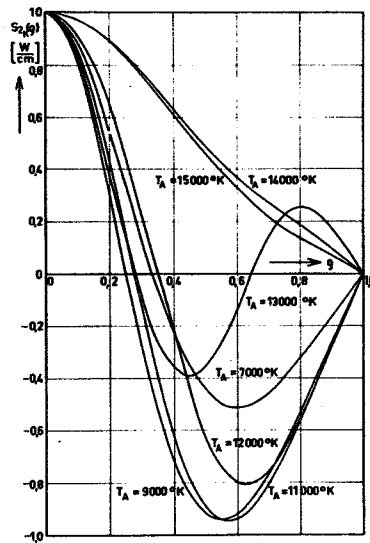


Abb. 49 Die Störgröße des Wärmestrompotentials zum kleinsten Eigenwert ( $R = 0,25\text{ cm}$ ,  $d = 1\,000\text{ dyn cm}^{-3}$ ,  $T_W = 500^\circ\text{K}$ )

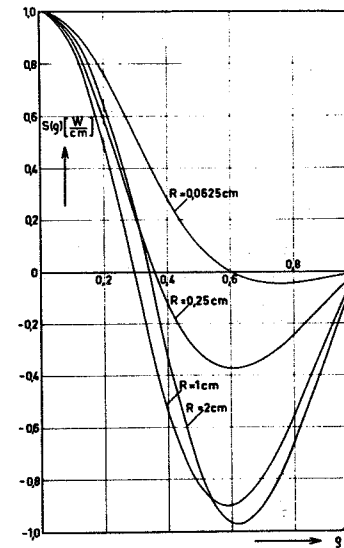
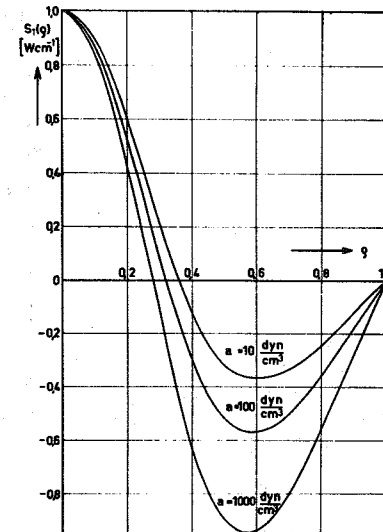


Abb. 50 Die Störgröße des Wärmestrompotentials zum kleinsten Eigenwert ( $T_A = 11\,000^\circ\text{K}$ ,  $a = 10\text{ dyn cm}^{-3}$ ,  $T_W = 500^\circ\text{K}$ )

Abb. 51 Die Störgröße des Wärmestrompotentials zum kleinsten Eigenwert ( $T_A = 11\,000^\circ\text{K}$ ,  $R = 0,25\text{ cm}$ ,  $T_W = 500^\circ\text{K}$ )



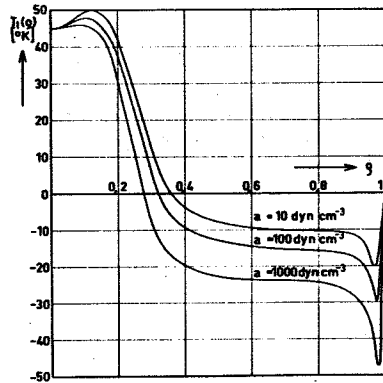


Abb. 52 Die Störgröße der Temperatur zum kleinsten Eigenwert ( $T_A = 11\,000^\circ\text{K}$ ,  $R = 0,25 \text{ cm}$ ,  $T_W = 500^\circ\text{K}$ )

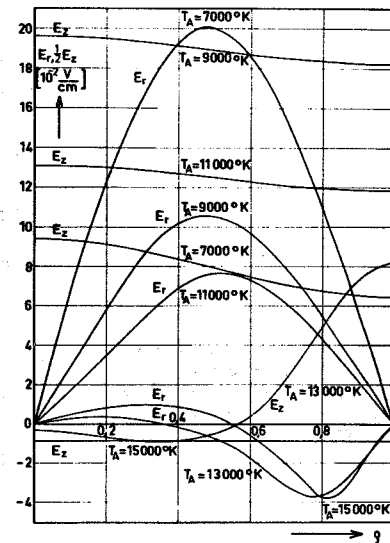


Abb. 53 Die Störgröße der radialen und axialen Feldstärke zum kleinsten Eigenwert ( $R = 0,25 \text{ cm}$ ,  $T_W = 500^\circ\text{K}$ ,  $a = 1\,000 \text{ dyn cm}^{-3}$ )

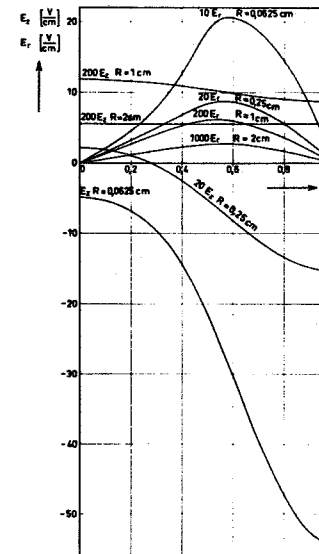


Abb. 54 Die Störgröße der radialen und axialen Feldstärke zum kleinsten Eigenwert ( $T_A = 11\,000^\circ\text{K}$ ,  $a = 10 \text{ dyn cm}^{-3}$ ,  $T_W = 500^\circ\text{K}$ )

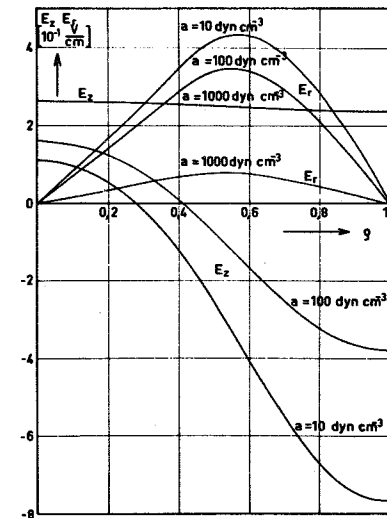


Abb. 55 Die Störgröße der radialen und axialen Feldstärke zum kleinsten Eigenwert ( $T_A = 11\,000^\circ\text{K}$ ,  $R = 0,25 \text{ cm}$ ,  $T_W = 500^\circ\text{K}$ )

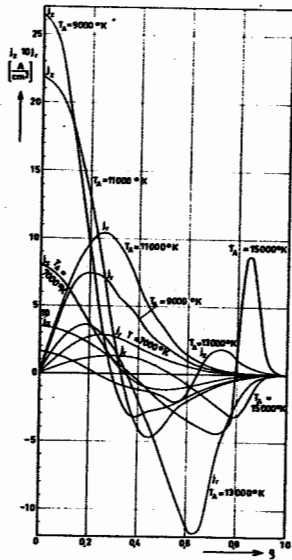


Abb. 56 Die Störgröße der radialen und axialen Stromdichte zum kleinsten Eigenwert ( $R = 0,25 \text{ cm}$ ,  $a = 1000 \text{ dyn cm}^{-3}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )

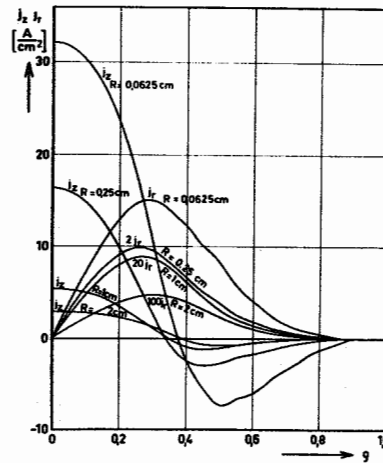


Abb. 57 Die Störgröße der radialen und axialen Stromdichte zum kleinsten Eigenwert ( $T_A = 11000^\circ \text{K}$ ,  $a = 10 \text{ dyn cm}^{-3}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )

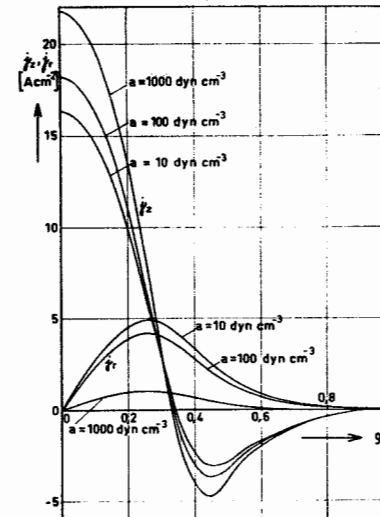
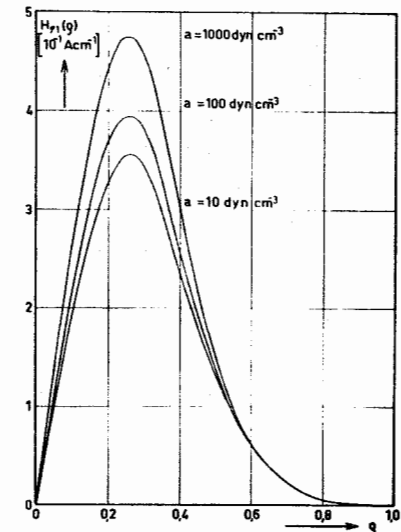


Abb. 58 Die Störgröße der radialen und axialen Stromdichte zum kleinsten Eigenwert ( $T_A = 11000^\circ \text{K}$ ,  $R = 0,25 \text{ cm}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )

Abb. 59 Die Störgröße der magnetischen Feldstärke ( $T_A = 11000^\circ \text{K}$ ,  $R = 0,25 \text{ cm}$ ,  $T_W = 500^\circ \text{K}$ )





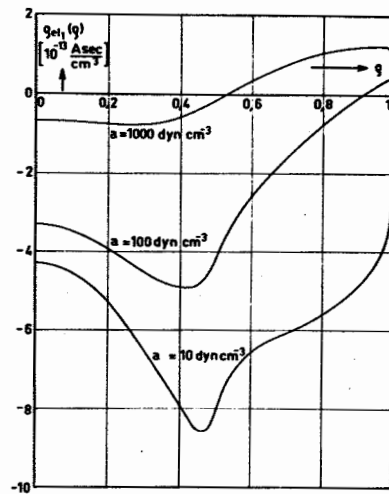


Abb. 60 Die Störgröße der elektrischen Ladungsdichte  
( $T_A = 11\,000^\circ\text{K}$ ,  $R = 0,25\text{ cm}$ ,  $T_W = 500^\circ\text{K}$ )

Sie wurden alle so normiert, daß die Störgröße des Wärmestrompotentials in der Achse den Wert  $1\text{ W cm}^{-1}$  annahm.

Wenn wir voraussetzen, daß am Rohranfang Gas einströmt, das im Bogen aufgeheizt werden soll, und daß dort eine Temperaturverteilung vorliegt, die mit den Störgrößen zum kleinsten Eigenwert in Einklang steht, dann läßt sich aus den obigen Ergebnissen folgendes Verhalten des Bogens ablesen.

Da das einströmende Gas insgesamt aufgeheizt werden soll, muß der Zuwachs an Enthalpie über den Rohrquerschnitt positiv sein

$$-\lambda_1 \cdot 2\pi R \int_0^1 g_{m, w} \cdot \frac{c_{p, w}}{w} S_1(q, \xi) g dq > 0 \quad (8.2.1)$$

Aus den Ergebnissen für die Störgröße des Wärmestrompotentials erkennt man, daß man für das Verhalten des Bogens zwei Fälle unterscheiden muß.

Einmal bewirkt das kalte einströmende Gas eine Erhöhung des Wärmestrompotentials und damit der Temperatur des Bogens in Achsennähe, während in der Nähe der Wand die Größen zum Teil stark reduziert werden. Das aufzuheizende Gas strömt also von der Wand her in den Bogen ein und wird hier aufgeheizt. Mit diesem Effekt ist eine Erhöhung der Stromdichte in der Achse verknüpft, während außen die Stromdichte erniedrigt wird. Der Bogen wird also durch die Strömung in der Achse konzentriert. Gleichzeitig fließt ein Strom in positiver radialer Richtung. Dieser Beitrag bewirkt eine Aufblähen des Bogens in axialer Richtung. Durch die Erhöhung des Stromes in Achsennähe wird natürlich das Magnetfeld in diesem Bereich des Bogens verstärkt. Die Feldstärke in axialer Richtung, die mit diesen Phänomenen verknüpft ist, kann dabei sowohl kleiner als auch größer als im ausgebildeten Bogen werden. Dagegen zeigt die Radialkomponente der Feldstärke immer in positive Richtung. Mit dieser Feldstärkeverteilung muß eine Raumladungsdichte verknüpft sein, die um einen Faktor 100 größer sein kann als im ausgebildeten Bogen, aber trotzdem noch klein ist gegen die absolute Elektronen- bzw. Ionendichte. Dieser besprochene Fall scheint für die meisten Werte unseres Parameterbereiches vorzuliegen.

Für einige andere Parameterwerte (z. B.  $T_A = 15\,000^\circ\text{K}$ ,  $R = 0,25\text{ cm}$ ,  $a = 1\,000\text{ dyn cm}^{-3}$ ,  $T_W = 500^\circ\text{K}$ ) scheint dagegen ein anderes Verhalten die Eigenschaften des Bogens zu bestimmen. Dabei setzen wir natürlich voraus, daß der Bogen für diese Werte noch stabil ist. Auf Grund der Forderung (8.2.1) muß das kalte Gas vor allem in der Mitte des Bogens das Wärmestrompotential erniedrigen. Hierdurch wird die Stromdichte in axialer Richtung in der Achse und in der Nähe der Wand kleiner, während im mittleren Bereich

die Stromdichte anwächst. Entsprechend muß die Radialkomponente in Achsennähe zum Zentrum und in Wandnähe zur Wand gerichtet sein. Die Radialkomponente der Feldstärke muß dann einen entsprechenden Verlauf zeigen. Die Feldstärke in Achsenrichtung wird erhöht. Entsprechend zu diesen Eigenschaften muß das Verhalten des Magnetfeldes und der Raumladung sein. Über die Parameterabhängigkeit dieser Größen von  $a$  läßt sich aus den obigen Abb. folgendes Verhalten ablesen. Mit wachsendem Druckgradienten wird der Bogen immer mehr in die Achse gedrängt. Da gleichzeitig die Radialkomponente kleiner wird, braucht der Bogen eine längere Strecke, um das Gas aufzuheizen. Dabei muß natürlich die Temperatur in der Nähe der Wand kleiner werden. Die Radialkomponente der Feldstärke zeigt ein ähnliches Verhalten wie die entsprechende Komponente des Stromes. Der axiale Anteil strebt immer mehr gegen eine konstante Verteilung. Die Voraussetzungen, die bei der Ableitung nach dem Besselmodell (siehe (7.2.1)) gemacht wurden, sind also am besten für große Durchflußmengen, d. h. große Druckgradienten, erfüllt.

Eine Vergrößerung des Radius des Entladungsrohres bewirkt im wesentlichen die gleichen Effekte wie im oben besprochenen Fall, bei dem Wärmestrompotential, bei der radialen Komponente der Stromdichte und der Feldstärke und bei der Feldstärke in Achsenrichtung. Die Störstromdichte in  $\xi$ -Richtung wird dagegen kleiner.

Als Funktion der Achsentemperatur ist das Verhalten der oben genannten Größen nicht einheitlich. Man muß das Verhalten bei niedrigen und hohen Achsentemperaturen unterscheiden. Man betrachte dazu die verschiedenen Abbildungen.

Natürlich sind die obigen Überlegungen nur richtig, wenn die Eigenfunktionen zum kleinsten Eigenwert das Verhalten wesentlich bestimmen. Da diese Komponente aber am langsamsten abklingt, wird das oben beschriebene Verhalten in einiger Entfernung von der Rohröffnung fast immer gegeben sein.

Ganz analog dazu wird sich der Bogen verhalten, wenn das einströmende Gas eine höhere Enthalpie mitbringt, als sie im Bogenquerschnitt vorhanden ist, nur daß sich jetzt das Vorzeichen der Störgrößen umkehrt. Ebenfalls ist auf diesem Wege eine Aussage über das Verhalten des Bogens im Ausströmgebiet möglich.

Um uns einen Überblick über die Eigenfunktionen zu den größeren Eigenwerten zu verschaffen, sind in Abb. 61 für einen festen Parameter, die ersten zehn Eigenfunktionen des Wärmestrompotentials aufgezeichnet. Sie wurden alle wieder in der Achse auf  $1 \text{ W cm}^{-1}$  normiert. Die zugehörigen Eigenwerte hatten folgende Zahlenwerte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,679	3,482	5,222	7,054	9,008	10,467	12,245	13,474	15,373	19,797

Mit größeren Eigenwerten nimmt die Zahl der Nullstellen der Funktionen zu.

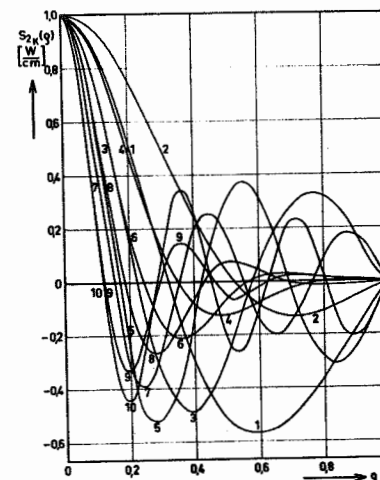


Abb. 61 Die ersten zehn Eigenfunktionen des Wärmestrompotentials ( $T_A = 11\,000^\circ\text{K}$ ,  $R_3 = 0,25 \text{ cm}$ ,  $a = 100 \text{ dyn cm}^{-1}$ ,  $T_W = 500^\circ\text{K}$ )

Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben, lassen sich diese Funktionen orthonormieren. Um die Wirkungsweise des Verfahrens zu demonstrieren, wurde die Methode numerisch durchgeführt. Bei zehn Eigenfunktionen war dazu pro Störgröße eine Zeit von vier Minuten erforderlich. Es wurde gefordert, daß die Stromdichte an der Stelle  $\xi = 0$  folgende Anfangsbedingung erfüllen sollte

$$j_z(\xi, 0) = \begin{cases} \frac{3I}{\pi g_1 R^2} \left(1 - \left(\frac{\xi}{g_1}\right)^2\right) & \text{für } 0 \leq \xi \leq g_1 \\ 0 & \text{für } g_1 \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (8.2.2)$$

Dabei wurde  $g_1$  gleich 0,55 gewählt. Gleichzeitig ist in (8.2.2) schon die Stromkontinuität berücksichtigt. Diese Stromverteilung liefert das Isothermenfeld im Bogen, das in Abb. 62 dargestellt ist.

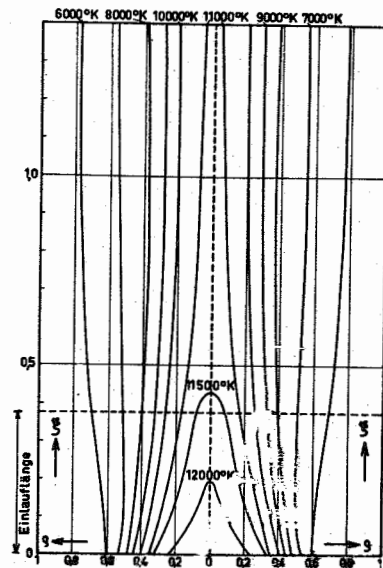


Abb. 62 Das Isothermenfeld im Einlaufgebiet des Bogens ( $T_A = 11\,000^\circ\text{K}$ ,  $T_W = 500^\circ\text{K}$ ,  $R = 0,25\text{ cm}$ ,  $a = 100\text{ dyn cm}^{-3}$ )

Man erkennt deutlich die Aufspreizung des Bogens in Achsenrichtung.

### 8.3. Die integralen charakteristischen Größen

Neben den lokalen Störgrößen, die im letzten Abschnitt behandelt wurden, sind im Einlaufgebiet des Bogens noch einige globale Größen von Interesse. Die entsprechenden Ausdrücke für diese Werte wurden schon im letzten Kapitel angegeben. Die Funktionen, die mit Hilfe des Besselmodells bestimmt wurden, sind in den Abb. 44 und 45 für  $\Delta = 0$  und  $1/2$  in geeignet normierter Form aufgetragen. Das aufgezeichnete Verhalten ist natürlich nur im Rahmen der Näherungsannahmen gültig und liefert qualitative Ergebnisse. Detaillierte Voraussagen sind den numerisch berechneten Werten zu entnehmen. In der folgenden Tabelle werden einige globale Störgrößen an der Stelle  $\xi = 0$  für verschiedene Parameter angegeben. Dabei wurde vorausgesetzt, daß das Verhalten im Einlaufgebiet des Bogens durch die Eigenfunktion zum kleinsten Eigenwert bestimmt wird. Die Störgröße des Wärmestrompotentials wurde wieder so normiert, daß ihr Wert in der Achse  $1\text{ W cm}^{-1}$  betrug. Aus diesem Grunde ist der absolute Wert der Größen nicht so sehr von Interesse als ihr relativer Verlauf in Abhängigkeit von den Parametern.

$$T_A [10^3 \text{ K}] \quad R [\text{cm}] \quad a [\text{dyn cm}^{-3}] \quad \Delta h_1 \left[ \frac{\text{W}}{\text{cm}} \right] \quad O_W - O_W \left[ \frac{\text{W}}{\text{cm}} \right] \quad \eta_1 [10^{-2}]$$

7	0,25	1 000	5,7	-10,3	1,79
9	"	"	21,2	-15,9	4,15
11	"	"	23,6	-16,9	3,54
13	"	"	(-) 9,1	-11,6	0,5
15	"	"	(-) 7,5	-4,0	0,15
11	0,0625	10	(-) 0,0046	+ 1,41	0,00069
"	0,25	"	0,493	- 7,55	0,074
"	1	"	21,2	-16,8	2,68
"	2	"	28,8	-20	2,14
"	0,25	10	0,493	- 7,55	0,074
"	"	100	6,53	-11	0,98
"	"	1 000	23,6	-16,9	3,54

Da kaltes Gas im Bogen aufgeheizt werden soll, muß die lokale Zunahme der Enthalpie über dem Bogenquerschnitt positiv sein. Dies hat zur Folge, daß wir alle lokalen Störgrößen für einige Parameter mit minus eins zu multiplizieren haben. Wie wir aus den Werten erkennen, steigt die Enthalpieproduktion mit wachsendem Rohrradius und größeren Durchflußmengen an. Bezüglich der variablen Achsentemperatur besitzt die dem Gas zugeführte Energie ein Maximum bei ungefähr 11 000 bis 12 000°K. Der Wärmestrom zur Wand nimmt im allgemeinen in Achsenrichtung zu. Er besitzt qualitativ die gleiche Parameterabhängigkeit wie die lokale Enthalpieproduktion. Für kleine Radien kann der Wärmestrom zur Wand am Rohranfang aber auch größer sein als im Unendlichen. Die abgestrahlte Energie im Einlaufgebiet kann sowohl größer als auch kleiner sein als die im vollausgebildeten Bogen. Diese Energieverluste müssen von der erhöhten elektrischen Leistung aufgebracht werden.

Alle diese Abhängigkeiten bewirken folgendes Verhalten des lokalen und globalen Wirkungsgrades der Gasaufheizung. Mit wachsendem Druckgradienten im Rohr steigt der Wirkungsgrad an, da der Wärmestrom zur Wand abnimmt. Als Funktion des Rohrradius durchläuft der Wirkungsgrad ein Maximum bei ungefähr  $R = 1$  cm. Ebenso ist das Verhalten bei variabler Achsentemperatur. Der maximale Wert des Wirkungsgrades ergibt sich bei Achsentemperaturen von ungefähr 10 000°K.

Diese Betrachtungen sind im Zusammenhang mit der Berechnung und Konstruktion von Lichtbogenheißgaserzeugern von großer Wichtigkeit. Mit Hilfe dieser Überlegungen läßt sich der wirtschaftlichste Arbeitsbereich solcher Anordnungen bestimmen.

## 9. ZUSAMMENFASSUNG

Das Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung der Phänomene und Effekte, die in Lichtbögen bei Wechselwirkung von thermischen, elektrischen und dynamischen Einflüssen im stationären Fall auftreten können. Dabei wird der Versuch unternommen, innerhalb von angegebenen Näherungsannahmen eine quantitative Beschreibung des Bogenverhaltens bei einfachen Geometrien zu erzielen.

Im ersten Kapitel werden einige wichtige grundlegende Eigenschaften des Lichtbogenplasmas abgeleitet und auf ihren Gültigkeitsbereich untersucht. Das Lichtbogenplasma zeichnet sich dadurch aus, daß wir innerhalb eines angegebenen Parameterbereiches den verschiedenen Teilchensorten eine einheitliche Temperatur zuordnen können. Außerdem bilden sich wegen der Kleinheit der Debyelänge und der vorkommenden Feldstärken außer in elektrodennahen Gebieten keine merkbaren Raumladungen aus. Aus diesem Grunde vereinfachen sich für das thermische, quasineutrale Lichtbogenplasma die beschreibenden Gleichungen ganz erheblich. Anstatt nämlich mit den Variablen der einzelnen Partialkomponenten rechnen zu müssen, kann man Größen einführen, die das Verhalten des Plasmas als Ganzes beschreiben. Diese gesuchten Größen sind verknüpft über die Zustandsgleichung und über die Bilanzgleichungen der Masse, des Impulses, der Energie und der Ladung in Verbindung mit den Maxwellgleichungen und den phänomenologischen Beziehungen. Die dazugehörenden Randbedingungen liefern die physikalisch sinnvollen Lösungen und legen die Geometrie des Bogens fest. Um die Eigenschaften der verschiedenen Arbeitsgase berücksichtigen zu können, müssen die Materialfunktionen als Funktion der Temperatur und des Druckes bekannt sein. Neben theoretischen Ergebnissen ist man hier auf angegebene experimentelle Methoden angewiesen, die benötigten Funktionen zu bestimmen. Für Stickstoff und Argon, wo entsprechende Messungen vorliegen, werden die Ergebnisse mitgeteilt.

Bei dem behandelten Problem wird ein halbinendliches zylindrisches Rohr betrachtet, in dem ein Lichtbogen brennt. An der Rohröffnung strömt Gas mit einer bestimmten Temperaturverteilung ein oder aus. In dem Rohr kann man zwei Bereiche unterscheiden, einmal das Ein- bzw. Ausströmgebiet und zum anderen den vollausgebildeten Bogen. Wie gezeigt wird, unterscheiden sich das thermische und elektrische Verhalten des vollausgebildeten Bogens nicht von dem ohne Konvektion. Hierzu kommt nur eine Poiseuille Strömung, die durch das Temperaturfeld entsprechend modifiziert wird. Das Verhalten in diesem Bereich wird für zwei Gase - Argon und Stickstoff - untersucht, da die Eigenschaften und Parameterabhängigkeit stark davon abhängen, ob atomare oder molekulare Arbeitsgase verwendet werden. Im Einlaufgebiet ist eine starke Wechselwirkung mit der Strömung zu verzeichnen, da hier das Gas aufgeheizt bzw. abgekühlt werden muß. Es werden mehrere analytische und numerische Methoden angegeben, die interessierenden Größen zu bestimmen. Dabei hängt der Grad der Genauigkeit der Lösung von den Näherungsannahmen ab. Numerische Berechnungen werden für das Einlaufgebiet eines Stickstoffbogens durchgeführt. Es können Aussagen gemacht werden, die auch für den Bau von Bogenheizgas-erzeugern von großer Wichtigkeit sind.

# 10. ZEICHENERKLÄRUNG

a	Gyrationsradius, konstanter Druckgradient
A	Gesamtnukleonenzahl der Atome, Parameter
B	magnetische Induktion, Parameter
c <sub>0</sub>	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
c	Berandungsfläche
c <sub>v</sub>	spezifische Wärme bei konstantem Volumen pro Masseneinheit
c <sub>p</sub>	spezifische Wärme bei konstantem Druck pro Masseneinheit
c <sub>schall</sub>	Schallgeschwindigkeit
D	Debyesche Abschirmdistanz, elektrische Verschiebungsdichte, totales Differential
e	Elementarladung
E	elektrische Feldstärke
E <sub>rad</sub>	spezifische Strahlungsenergie
f	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion im Phasenraum
g	Gewichtsfaktor
G	elektrischer Leitwert pro Einheitslänge des Bogens
h	Plancksches Wirkungsquantum, Enthalpie pro Masseneinheit
h <sub>m</sub>	mittlere transportierte Enthalpie
H	magnetische Feldstärke
I	Stromstärke
j	elektrische Stromdichte
J <sub>k</sub>	Besselfunktion k. Ordnung
k	Boltzmannkonstante, natürliche Zahl
K	Kraft
L	gesamte Rohrlänge
L <sub>einl</sub>	charakteristische Größe für die Einlaufstrecke
m	Teilchenmasse
n	Teilchendichte, natürliche Zahl
N <sub>k</sub>	Neumannsche Funktion k. Ordnung
p	Druck

$P_{ik}$	k. Nullstelle der Besselfunktion i. Ordnung, Persistenzfaktor
$P_{el}$	elektrisch zugeführte Leistung pro Einheitslänge des Bogens
$P_{ent}$	Entartungsparameter (Teilchenzahl/ Zustandssumme)
$P_{rad}$	Gesamtabstrahlung pro Einheitslänge des Bogens
$q$	Teilchenladung
$Q_{ik}$	Wirkungsquerschnitt der i. gegen die k. Teilchensorte
$Q_m$	Gesamtmassendurchfluß durch den Bogen
$Q_h$	Enthalpiestrom durch den Bogen
$Q_{rad}$	Strahlungsfluß
$Q_w$	Wärmestrom
$r, \vartheta, z$	Zylinderkoordinate
$R$	Radius des Entladungsrohres
$S$	Wärmestrompotential
$t$	Zeitkoordinate
$T$	Temperatur
$\bar{u}$	spezifische Abstrahlung
$u, v, w$	Komponenten der Geschwindigkeit $v$ in Zylinderkoordinaten
$u_m$	innere Energie pro Masseneinheit
$\bar{v}$	mittlere thermische Geschwindigkeit
$w$	Diffusionsgeschwindigkeit
$w_m$	mittlere Geschwindigkeit
$x, y, z$	Kartesische Koordinaten
$X, Y, Z$	linear unabhängige Eigenfunktionen
$Z$	Zahl der Elementarladungen der Ionen
$\alpha$	Ionisationsgrad des Plasmas, Thermodiffusionsfaktor
$\beta_k$	Proportionalitätsfaktor
$\delta$	partielle Ableitung
$\delta_r$	Proportionalitätsfaktor
$\delta^{ij}$	Kroneckersymbol
$\varepsilon$	spezifische Energieproduktion
$\varepsilon_m$	totale Energie pro Masseneinheit
$\varepsilon_0$	absolute Dielektrizitätskonstante
$\eta$	Wirkungsgrad der Gasaufheizung

$\mathcal{J}$	Winkel
$\kappa$	Wärmeleitfähigkeit
$\lambda$	Eigenwert, mittlere freie Weglänge
$\Lambda$	Verhältnis von Debyelänge zum minimalen Stoßparameter
$\mu$	Zähigkeit
$\mu_{el}$	absolute magnetische Permeabilität
$\nu$	Frequenz
$\varrho = r R^{-1}$	normierter Radius
$\varrho_i$	normierter Bogenradius nach dem Besselmodell
$\varrho_{el}$	elektrische Ladungsdichte
$\varrho_m$	Massendichte
$\mathcal{G}$	elektrische Leitfähigkeit, spezifische Massenproduktion
$\mathcal{G}Z$	spezifische Impulsproduktion
$\tau$	mittlere freie Flugzeit, Spannungstensor
$\varphi$	elektrisches Potential
$\Phi$	Impulsflußtensor, Dissipationsfunktion
$\xi = z R^{-1}$	normierte Koordinate in Achsenrichtung

# 11. LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Ahlborn, B., u. R. Wienecke: Z. Physik 165, 491 (1961)
- [2] Amdur, I., a. E. A. Mason: Phys. of Fluids I, 370 (1958)
- [3] Bronstein, I. N., u. K. A. Semandjajew: Taschenbuch der Mathematik. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig (1959)
- [4] Brown, S. C., u. W. I. Allis: Basic data of Electrical Discharges. Research Laboratory of Electronics M. I. T. Cambridge, Mass. (1954)
- [5] Burhorn, F.: Z. Physik 140, 440 (1955)
- [6] Burhorn, F.: Z. Physik 155, 42 (1959)
- [7] Burhorn, F., u. R. Wienecke: Z. Phys. Chem. 215, 269 (1960)
- [8] Burhorn, F., u. R. Wienecke: Z. Phys. Chem. 213, 37 (1960)
- [9] Busz, G., u. W. Finkelburg: Z. Physik 138, 212 (1954)
- [10] Cann, G. L.: Energy Transfer Processes in a Partially Ionized Gas. Guggenheim Aeronautical Laboratory, Cal. Inst. of Techn. Memorandum No 61 (1961)
- [11] Chapmann, S., u. T. G. Cowling: The mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge University Press (1958)
- [12] Collatz, L., u. H. Görtler: ZAMP 5, 95 (1954)
- [13] Cobine, J. D.: Gaseous Conductors, New York, Dover Publications (1958)
- [14] Cordero, J., F. W. Diederich, a. H. Hurwicz: Aerospace Engineering, Jan. 1963, 166
- [15] D'Ans, J., u. E. Lax: Taschenbuch für Chemiker und Physiker, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1949)
- [16] Elenbaas, W.: Physica 1, 673 (1934)
- [17] Elenbaas, W.: The High Pressure Mercury Vapour Discharge, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, (1951)
- [18] Emmons, H. W., a. R. I. Land: Phys. of Fluids 5, 1489 (1962)

- [19] Finkelburg, W., a. H. Maecker: Elektrische Bögen und thermisches Plasma, Handbuch der Physik. Bd. XXII. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1956)
- [20] Francis, V. J.,: Phil. Mag. 37, 433, 653 (1946)  
40, 435 (1949)
- [21] Geiger, W.: Z. Naturforsch. 18 a, 1315 (1963)
- [22] Giannini, G. M.: Scientif. American, Vol. 196, p. 80, 88 (1957)
- [23] Goldenberg, H.: Brit. J. Appl. Phys. 10, 47 (1959)
- [24] Heller, G.: Physics 6, 389 (1935)
- [25] Hirschfelder, J. O., C. F. Curtiss, a. R. B. Bird: Molecular Theory of Gases and Liquids. John Wiley & Sons, New York (1954)
- [26] Jagodzinski, H.: Z. Physik 120, 318 (1943)
- [27] Jahnke-Emde-Lösch: Tafeln Höherer Funktionen, G. B. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart (1960)
- [28] Koch, O.: Z. Physik 126, 507 (1949)
- [29] Koch, O., K. J. Lesemann, u. A. Walter: Z. Physik 127, 153 (1949)
- [30] Koch, O., Z. Physik 127, 455 (1950)
- [31] Korn, G. A., a. Th. M. Korn: Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, Mc Graw-Hill Book Com., New York, Toronto, London, (1961)
- [32] Kotanchik, J. N., a. D. H. Greenshields: Aerospace Engineering, Jan. 1963, 192
- [33] Krempf, H.: Z. Physik 167, 302 (1962)
- [34] Lamar, E. S., A. M. Stone, a. K. T. Compton: Phys. Rev. 55, 1235 (1939)
- [35] Linhardt, J. G.: Plasma Physics, North-Holland Publishing Comp. Amsterdam (1961)
- [36] Loeb, L. B.: Basic Processes of Gaseous Electronics, Univ. of Calif. Press, Berkeley and Los Angeles (1960)
- [37] Maecker, H., Th. Peters, a. H. Schenk: Z. Physik 140, 119 (1955)

- [38] Maecker, H.: Z. Physik 157, 1 (1959)
- [39] Maecker, H.: Z. Physik 158, 392 (1962)
- [40] Maecker, H.: Proceedings Fifth, Int. Conf. on Ioniz. Phen. in Gases, Munich 1961, 1793, vol. II
- [41] Magnus, W., u. F. Oberhettinger: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1948)
- [42] Mandelstam, S. L.: Colloquium Spectroscopicum Internationale VI, Amsterdam (1955)
- [43] Mandelstam, S. L.: Spectrochim. Acta 11, 457 (1956)
- [44] Mannkopff, R.: Z. Physik 86, 161 (1933)
- [45] Mannkopff, R.: Z. Physik 120, 288, 301 (1943)
- [46] Meixner, J.: Z. Naturforsch. 7a, 553 (1952)
- [47] Pelzer, H.: Conf. Techn. Report Ref. G/XT 164, The British Electrical and Allied Industries Research Association 1958
- [48] Peters, Th.: Z. Physik 144, 612 (1956)
- [49] Peters, Th.: Proc. Fifth Int. Conf. on Ioniz. Phen. in Gases, Munich 1961, vol. II, 885
- [50] Peters, Th.: Astron. Acta, vol. VII 150 (1961)
- [51] Punnis, B.: Diss. Göttingen (1947)
- [52] Renard, M. L.: Experimental Investigation of an Arc Heater, Firestone Flight Sciences Laboratory, Cal. Inst. of Techn. Pasadena, Calif. Memorandum No 64, (1962)
- [53] Ringler, H.: Z. Physik 169, 273 (1962)
- [54] Rosenbluth, M. N., W. Mac Donald, a. D. Judd: Phys. Rev. 1, 107 (1957)
- [55] Schirmer, H., u. J. Friedrich: Techn. Wissenschaftl. Abh. der Osram Gesellschaft (1958)
- [56] Schlichting, H.: Grenzschichttheorie, Verlag G. Braun Karlsruhe (1958)
- [57] Schmitz, G.: Physik. Z. 44, 129 (1943)
- [58] Schmitz, G.: Z. Naturforsch. 5 a, 571 (1950)
- [59] Schmitz, G.: Z. Naturforsch. 10 a, 495 (1955)

- [60] Schmitz, G.: Terzo Congr. Int. sui Fenom. d' Ioniz. nei Gas, Venezia (1957), S. 928
- [61] Schmitz, G., u. J. Uhlenbusch: Z. Physik 159, 554 (1960)
- [62] Schmitz, G., u. J. Uhlenbusch: Proc. Fifth Int. Conf. on Ioniz. Phen. in Gases, Munich 1961, vol. II, p. 878
- [63] Schmitz, G. (edited by J. Birkeland): The Profile of the Arc Column ARL-Report 62-401 (1962)
- [64] Schmitz, G., u. J. Uhlenbusch: Z. Physik 166, 460 (1962)
- [65] Schmitz, G., u. H. J. Patt: Z. Physik 167, 163 (1962)
- [66] Schmitz, G., u. H. J. Patt: Z. Physik 171, 449 (1963)
- [67] Schmitz, G., H. J. Patt, u. J. Uhlenbusch, Z. Physik 173, 552 (1963)
- [68] Schmitz, G., J. Uhlenbusch: Z. Naturforsch. 18 a, 772 (1963)
- [69] Schmitz, G., H. J. Patt, L. Detloff, u. J. Uhlenbusch: Bericht für das Bundesministerium der Verteidigung, T II 5, Bonn, April 1963
- [70] Schmitz, G., J. Uhlenbusch, L. Detloff, u. H. J. Patt: Bericht für das Bundesministerium der Verteidigung, T II 5, Bonn, April 1964
- [71] Shepard, Ch. E., a. V. R. Watson: Performance of a Constricted-Arc Discharge in a Supersonic Nozzle, Paper presented at Fifth Biennial Gas Dynamics Symposium Northwestern University, Evanston, Illinois, August 1963
- [72] Shifstad, J. G.: AIAA Journal, vol. 1, No 8, 1906 (1963)
- [73] Shifstad, J. G., a. S. N. B. Murthy: Analysis of Arc-Heating Phenomena in a Tube (Jet Propulsion Center Purdue University Lafayette) Indiana, USA, 1964
- [74] Shih-I Pai: Magnetogasdynamics and Plasma Dynamics, Springer-Verlag, Wien 1962
- [75] Spitzer, L., a. R. Härm: Phys. Rev. 89, 977 (1953)
- [76] Spitzer, L.: Physics of Fully Ionized Gases, Interscience Publishers, New York-London 1962



- [77] Steenbeck, M.: Physik. Z. 33, 809 (1932)
- [78] Steenbeck, M.: Physik. Z. 38, 1099 (1937)
- [79] Steenbeck, M.: Beitr. aus der Plasmaphysik 1, 1 (1960/61)
- [80] Stine, H.A., a. V.R. Watson: NASA Technical Note D-1331, Washington 1962
- [81] Stine, H.A.: The Hyperthermal Supersonic Aerodynamic Tunnel. National Aeronautics and Space Administration, Ames Research Center, Moffet Field, Calif.
- [82] Talbot, L.: Journ. Appl. Mech., vol. 21, 1 (1954)
- [83] Tonks, L., a. I. Langmuir: Phys. Rev. 33, 195, 990 (1929)
- [84] Uhlenbusch, J.: Diss. Techn. Hochschule Aachen (1962)
- [85] Uhlenbusch, J.: Z. Phys. (im Druck)
- [86] Waldmann, L., u. K. Clusius: Naturw. 30, 711 (1942)
- [87] Weber, H.E., a. J.H. McGinn: Aerospace Engineering Jan. 1963, 202-209.
- [88] Weizel, W., u. G. Schmitz: Phys. Z. 44, 383 (1943)
- [89] Weizel, W., u. R. Rompe: Theorie elektrischer Lichtbögen und Funken, J.A. Barth Verlag Leipzig 1949
- [90] Wienecke, R.: Z. Phys. 143, 118 (1955)
- [91] Wienecke, R.: Z. Naturforsch. 18 a, 1151 (1963)
- [92] Witte, H.: Z. Physik 88, 415 (1934)

### Lebenslauf

Am 20. April 1937 wurde ich in Troisdorf (Siegkreis) als Sohn der Eheleute Wilhelm und Magdalena Patt geboren. Nach dem Besuch der katholischen Volksschule in Troisdorf bestand ich Ostern 1948 die Aufnahmeprüfung am altsprachlichen Humperdinck-Gymnasium in Siegburg. Am 26. Februar 1957 legte ich dort meine Reifeprüfung ab. Im Sommersemester 1957 begann ich an der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule in Aachen das Studium der Physik. Im Frühjahr 1962 bestand ich dort die Diplom-Hauptprüfung in Physik. Seit Mai 1962 bin ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter von Herrn Professor Dr. rer. nat. G. Schmitz am I. Physikalischen Institut der Hochschule beschäftigt.

Druck: Gerd Wasmund, Köln - Zweigstelle Aachen, Friesenstraße 13

291 Saarländische ULB



00075068101011

h 65-2888